Universidad Zaragoza
1542

# Trabajo Fin de Máster

## Sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas: una propuesta didáctica para 2º de ESO

## Linear equations systems with two unknown variables: a didactic proposal for 2nd of Secondary School


Autor

Antonio Villoro Arnau

Director

Sergio Martínez Juste

FACULTAD DE EDUCACIÓN


Año 2020

# Índice

## Introducción

En el presente trabajo presentado se recoge una propuesta didáctica de los Sistemas de Ecuaciones Lineales con 2 incógnitas, para segundo curso de Educación Secundaria Obligatoria.

El planteamiento y resolución de ecuaciones aparece ya en el primer curso de ESO. Su manejo permite enfrentarse a una amplia gama de situaciones, relacionadas con problemas de la vida real, o con otros campos de conocimiento científico (inclusive las propias matemáticas), entre otras. Los Sistemas de Ecuaciones Lineales aparecen de forma natural al tratar multitud de problemas: numéricos, geométricos, de mezclas, de edades, comerciales, etc. y se pueden encontrar en la historia este tipo de problemas incluso desde el año 2000 a. C. Se pueden dar enfoques muy interesantes para comprender el objeto y las manipulaciones que se pueden hacer del mismo. La resolución de este tipo de problemas también se puede abordar de maneras muy distintas (distintas técnicas algebraicas, gráfica, tabular), lo cual permite dar varios puntos a las soluciones del objeto y en consecuencia tener una mayor comprensión del mismo.

En esta memoria aparecen varias secciones, con el objetivo de dotar de total sentido a la propuesta didáctica del objeto que estamos tratando. Se recoge la definición de los Sistemas de Ecuaciones Lineales con 2 incógnitas (tanto científica como escolar) y se observan y estudian los campos de problemas, técnicas y tecnologías asociados al objeto. También se hace una contextualización del objeto, estudiando cómo se presenta de forma escolar así como la preparación del alumnado para abordar el estudio del mismo. Se propone además una serie de problemas asociados al objeto para su mayor comprensión, algunos que serán la razón de ser de conceptos esenciales del objeto y otros más específicos, asociados a consolidar el conocimiento del mismo. Finalmente se recoge una secuenciación didáctica en la que se organizan y se ponen en práctica todos los conceptos del objeto estudiados.

En esta propuesta se han tratado de escoger y proponer problemas que le den sentido al objeto matemático, facilitando una metodología de aprendizaje a través de la resolución de problemas, con la intención de que el alumnado reflexione e indague hacia la búsqueda de estrategias para resolverlos, de manera que pueda ir construyendo el conocimiento de forma autónoma, consiguiendo de esta manera un aprendizaje significativo.

# A. Definición del objeto matemático a enseñar

## A1. Objeto matemático a enseñar

El objeto matemático que se ha elegido para esta propuesta didáctica son los Sistemas de Ecuaciones Lineales con 2 incógnitas en 2 ESO. Podemos encontrar una definición matemática formal de sistemas de ecuaciones lineales:

"El sistema general $m \times n$ (de $m$ ecuaciones con $n$ incógnitas) está dado por

$$\begin{array}{ccccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & a_{13}x_3 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & a_{23}x_3 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ a_{31}x_1 & + & a_{32}x_2 & + & a_{33}x_3 & + & \cdots & + & a_{3n}x_n & = & b_3 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & a_{m3}x_3 & + & \cdots & + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{array}$$

En el sistema todos los coeficientes $a_{ij}$ y $b_i$ son números reales dados." (Stanley, I. Grossman S. y Flores, J., 2012, p. 16)

El objeto a considerar en este trabajo son Sistemas de Ecuaciones Lineales con dos incógnitas, por lo que particularizando la definición anterior de sistemas de ecuaciones lineales a 2 incógnitas se podría definir como:

"Un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas es un sistema de la forma

$$\begin{aligned} a_{11}x + a_{12}y &= b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y &= b_2 \end{aligned}$$

en donde coeficientes $a_{ij}$ y $b_i$ son números reales dados."

Algunos autores, como De Faria (2006), consideran definiciones como ésta, como definiciones propias del Saber Sabio, es decir, del saber generado por el matemático profesional, con un lenguaje muy especializado y formal. Utilizar una definición de este estilo para exponer lo que es un sistema lineal de ecuaciones de segundo grado en 2 ESO, supondría un obstáculo a considerar en el proceso de aprendizaje. Es por esto que hay que presentar este objeto ligado a una forma didáctica que sirva para presentar al estudiante, lo que algunos textos denominan como Saber a Enseñar. Al fenómeno de transformación del objeto para ser enseñado en una comunidad escolar desde el Saber Científico o Saber Sabio se le denomina transposición didáctica.

Encontramos definiciones de Sistemas de Ecuaciones Lineales con dos incógnitas más propias de un Saber a Enseñar, y por lo tanto adaptadas a una comunidad escolar en libros escolares, como la siguiente:
"Un **sistema lineal de dos ecuaciones con dos incógnitas** es una expresión algebraica de la forma:

$$\left.\begin{array}{r} ax+by=c \\ a'x+b'y=c' \end{array}\right\}$$

Una **solución** de un sistema es un par de valores $(x, y)$ que verifica las dos ecuaciones del sistema. " (Arias y Maza ,2012, p. 164)

## A2. Situación en el currículo

La Educación Secundaria y Primaria tiene como marco legislativo la Ley Orgánica 8/2013, del 9 diciembre, para la Mejora de la Calidad Educativa (LOMCE), cuyo currículo básico a nivel estatal se establece en el Real Decreto 1105/2014, de 26 de diciembre, por el que se establece el currículo básico de la Educación Secundaria Obligatoria y del Bachillerato.

Atendiendo al currículo de Educación Secundaria de Aragón, correspondiente a la ORDEN ECD/489/2016,de 26 de mayo, por la que se aprueba el currículo de la Educación Secundaria Obligatoria y se autoriza su aplicación en los centros docentes de la Comunidad

Autónoma de Aragón, detallamos a continuación los contenidos, criterios de evaluación y estándares de aprendizaje que se van a desarrollar en la secuencia didáctica.

**Contenidos:**

- Sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas. Métodos algebraicos de resolución y método gráfico. Resolución de problemas.

**Criterios de evaluación:**

- **Crit.MA.1.2.** Utilizar procesos de razonamiento y estrategias de resolución de problemas, realizando los cálculos necesarios y comprobando las soluciones obtenidas.
- **Crit.MA.1.6.** Desarrollar procesos de matematización en contextos de la realidad cotidiana (numéricos, geométricos, funcionales, estadísticos o probabilísticos) a partir de la identificación de problemas en situaciones problemáticas de la realidad.
- **Crit.MA.2.7.** Utilizar el lenguaje algebraico para simbolizar y resolver problemas mediante el planteamiento de ecuaciones de primer, segundo grado y sistemas de ecuaciones, aplicando para su resolución métodos algebraicos o gráficos y contrastando los resultados obtenidos.

**Estándares de aprendizaje:**

- **Est.MA.1.2.1**. Analiza y comprende el enunciado de los problemas (datos, relaciones entre los datos, contexto del problema).
- **Est.MA.1.6.2.** Establece conexiones entre un problema del mundo real y el mundo matemático: identificando el problema o problemas matemáticos que subyacen en él y los conocimientos matemáticos necesarios.
- **Est.MA.1.6.**4. Interpreta la solución matemática del problema en el contexto de la realidad.
- **Est.MA.2.7.1**. Comprueba, dada una ecuación (o un sistema), si un número (o números) es (son) solución de la misma.
- **Est.MA.2.7.2.** Formula algebraicamente una situación de la vida real mediante ecuaciones de primer y segundo grado, y sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas, las resuelve e interpreta el resultado obtenido.

## A3. Campo de problemas, técnicas y tecnologías asociadas al objeto matemático

Algunos objetos matemáticos han surgido para resolver problemas particulares. Dichos problemas forman parte del significado del objeto, dándole justificación y dotándolo de sentido. De aquí la importancia del estudio detallado del campo de problemas, así como las técnicas y tecnologías que van unidos a ellos. Hacemos a continuación una enumeración de los campos de problemas, técnicas y tecnologías asociados a los Sistemas de Ecuaciones Lineales con 2 incógnitas:

**Campo de problemas:**

**CP0: Asociados a ecuaciones lineales con 2 incógnitas:**

- **CP0.1:** Distinguir y reconocer ecuaciones lineales con 2 incógnitas
- **CP0.2:** *Conocer y generar ecuaciones lineales con 2 incógnitas equivalentes*.
- **CP0.3:** Cambios entre sistemas de representación de las ecuaciones lineales.

**CP1: Asociados a sistemas de ecuaciones lineales con 2 incógnitas:**

- **CP1.1:** Distinguir y reconocer un sistema de ecuaciones lineales con 2 incógnitas.
- **CP1.2:** Conocer y generar sistemas de ecuaciones con 2 incógnitas equivalentes.
- **CP1.3:** Cambios entre sistemas de representación de los sistemas de ecuaciones lineales.

**CP2: Asociados a la resolución de sistemas de ecuaciones lineales**

**Técnicas:**

**T0: Asociadas a ecuaciones lineales con 2 incógnitas:**

- **T0.1:** Técnicas para distinguir y reconocer ecuaciones lineales con 2 incógnitas

- **T0.2:** Técnicas para generar una ecuación lineal equivalente a partir de una ecuación lineal dada.
- **T0.3:** Técnicas para crear una tabla de valores a partir de una ecuación con dos incógnitas
- **T0.4:** Técnica para representar la ecuación de una recta

**T1: Asociadas a sistemas de ecuaciones lineales con 2 incógnitas:**

- **T1.1:** Técnicas para distinguir y reconocer un sistema de ecuaciones lineales con 2 incógnitas.
- **T1.2:** Técnicas para crear sistemas equivalentes a uno dado mediante el uso de operaciones elementales.
- **T1.3:** Técnicas para conocer y comprender el concepto de solución de un sistema.
- **T1.4:** Técnicas para distinguir entre los distintos tipos de ecuaciones lineales que existen (compatible determinado, compatible indeterminado, incompatible)

**T2. Técnicas de resolución de sistemas ecuaciones lineales**

- **T2.1:** Resolver sistemas de ecuaciones lineales mediante tablas.
- **T2.2:** Resolver gráficamente sistemas de ecuaciones lineales.
- **T2.3:** Resolver sistemas de ecuaciones lineales mediante los distintos métodos algebráicos:

  **T2.3-a:** sustitución

  **T2.3-b:** igualación

  **T2.3-c:** reducción

**Tecnologías:**

**TG0: Asociadas a ecuaciones lineales con 2 incógnitas:**

- **TG0.1:** Definición de ecuación lineal con 2 incógnitas.
- **TG0.2:** Forma canónica de una ecuación lineal.
- **TG0.3:** Concepto de ecuaciones equivalentes.

- **TG0.4:** Definición de solución de una ecuación.

**TG1: Asociadas a sistemas de ecuaciones lineales con 2 incógnitas:**

- **TG1.1:** Definición de sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas.
- **TG1.2:** Definición de distintos tipos de sistemas de ecuaciones lineales
- **TG1.3:** Tecnología para identificar los distintos tipos de sistemas de ecuaciones lineales
- **TG1.4:** Concepto de sistema de ecuaciones equivalentes.
- **TG1.5:** Definición de solución de un sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas.

**T2. Tecnologías que justifican la resolución de sistemas ecuaciones lineales**

- **TG2.1:** Justificación de la técnica tabular:
- **TG2.2:** Justificación del método gráfico
- **TG2.2:** Justificación de los métodos algebraicos de resolución:

# B. Estado de enseñanza-aprendizaje del objeto matemático

## B1. Introducción escolar del objeto matemático

Si tenemos en cuenta el marco legislativo actual considerando ECD/489/2016, del 26 de mayo, por la que se aprueba el currículo de la Educación Secundaria Obligatoria, observamos que allí están citados los contenidos que se tienen que impartir en Educación Secundaria Obligatoria, aunque sin demasiado nivel de concreción.

Algunos autores, como Martínez, Muñoz y Oller (2015, p. 97-99) mencionan y justifican el impacto de los libros de texto sobre la práctica docente efectiva. Por ejemplo, Monterrubio y Ortega (2009, p. 38) afirman que "el libro de texto es un recurso habitual en el desarrollo del proceso de enseñanza y aprendizaje, hasta el punto de que, en muchas ocasiones, es el propio manual el que determina el currículo real".

El hecho de que no quede demasiado claro el nivel de concreción en el currículo y que los contenidos no queden demasiado desglosados o detallados en el mísmo, unido a la importancia mencionada de los libros de texto, justifica en cierto modo centrarse en el estudio de los libros de texto para hacer un análisis del estado de enseñanza-aprendizaje del objeto matemático.

Es por lo que en este apartado, analizaremos cómo se presentan los Sistemas de Ecuaciones Lineales de 2 incógnitas en los siguientes libros de texto:

- Bruño (2012)
- Anaya (2016)
- SM (2016)

Analizaremos en primero la introducción escolar del objeto, viendo cómo presentan los distintos libros de texto los Sistemas de Ecuaciones Lineales. En el siguiente apartado haremos mención a los campos de problemas, técnicas y tecnologías que aparecen en estos libros de texto.

La forma de presentar los Sistemas de Ecuaciones Lineales por Bruño es con una definición meramente algebraica, institucionalizando directamente el objeto, y dando un esquema general de lo que se verá en la Unidad Didáctica de Sistemas de Ecuaciones Lineales con 2 incǵonitas. En el esquema, además de definir el objeto, aparecen técnicas que se utilizarán para resolver este tipo de problemas y se cita para qué se utilizan los Sistemas de Ecuaciones Lineales.

Por su parte, SM presenta en la introducción unos pocos problemas que tienen relación con los Sistemas de Ecuaciones Lineales, aunque también institucionaliza directamente el objeto con una definición algebraica, definiendo previamente lo que es una ecuación lineal con dos incógnitas y mostrando cómo ésta se puede representar en el plano.

Anaya sin embargo, en su introducción despliega una gran cantidad de ejemplos de problemas relacionados con los Sistemas de Ecuaciones Lineales (dinero, edades, balanzas, ejemplos históricos…) y hace una mención a la razón de ser histórica de los Sistemas de Ecuaciones Lineales con 2 incógnitas. Describe lo que es una ecuación de primer grado con dos incógnitas como "la relación existente entre dos valores desconocidos", y ayudándose de un ejemplo en donde $x$ e $y$ representan unas distancias desconocidas define las ecuaciones lineales, sin incidir demasiado en una definición algebraica. A continuación muestra cómo representar en el plano una ecuación lineal de primer grado, para finalmente acabar dando una definición algebraica y formal de Sistema de Ecuaciones Lineales con 2 incógnitas.

## B2. Razón de ser, campos de problemas, técnicas y tecnologías que se enseñan en los libros de texto

### Razón de ser

Sobre las razones de ser del objeto matemático, más allá de la razón de ser de la presentación del objeto matemático, que se ha estudiado en el apartado anterior, no hay problemas que manifiesten la razón de ser de los distintos campos de problemas, técnicas y tecnologías que se expondrán en los libros. Simplemente se centran en la resolución de problemas utilizando distintos métodos (técnicas) sin que los problemas en sí sean una razón de ser de los mismos.

El único libro que más se aproxima a exponer problemas que sean una razón de ser es Anaya, que en la presentación de los Sistemas de Ecuaciones Lineales sí expone algún problema que se podría considerar como razón de ser del método de reducción, aunque cuando presenta el método de reducción se centra especialmente en las técnicas de resolución del mismo. Ocurre lo mismo con la razón de ser del cambio de lenguaje habitual a lenguaje algebraico de un Sistema de Ecuaciones Lineales con 2 incógnitas, pues expone al principio algún problema con esa razón de ser, aunque no profundiza demasiado ni hace mención del problema más adelante, ni crea ningún ejemplo más que pueda servir como razón de ser del cambio de representación mencionado (aunque sí expone varios ejercicios con ejemplos para reforzar este concepto).

**Campos de problemas**

Se exponen a continuación a modo de tabla, los campos de problemas que aparecen en cada uno de los libros estudiados:

| Campos de problemas | | Bruño | SM | Anaya |
|---|---|---|---|---|
| CP0 | CP0.1 | ✗ | ✗ | ✗ |
| | CP0.2 | ✗ | ✗ | ✗ |
| | CP0.3 | ✔ | ✔ | ✔ |
| CP1 | CP1.1 | ✗ | ✔ | ✗ |
| | CP1.2 | ✗ | ✔ | ✗ |
| | CP1.3 | ✔ | ✔ | ✔ |
| CP2 | | ✔ | ✔ | ✔ |

En Bruño y Anaya, se considera que no se trabaja el campo de problemas CP1.2, pues aunque se deben efectuar operaciones relacionadas con éste campo para aplicar el método de reducción, simplemente explica el método y un recetario de operaciones a realizar, pero no aparece ningún problema que trabaje este campo de forma específica, ni se explica con claridad qué operaciones dejan invariante un Sistema Lineal de Ecuaciones con 2 incógnitas.

**Técnicas**

Citamos a continuación a modo de tabla, las técnicas que aparecen en cada uno de los libros que estamos considerando:

| Técnicas | | Bruño | SM | Anaya |
|---|---|---|---|---|
| T0 | T0.1 | ✗ | ✗ | ✗ |
| | T0.2 | ✗ | ✗ | ✗ |
| | T0.3 | ✗ | ✔ | ✗ |
| | T0.4 | ✔ | ✔ | ✔ |
| T1 | T1.1 | ✗ | ✗ | ✗ |
| | T1.2 | ✗ | ✔ | ✗ |
| | T1.3 | ✗ | ✗ | ✗ |
| | T1.4 | ✗ | ✗ | ✗ |
| T2 | T2.1 | ✗ | ✗ | ✗ |
| | T2.2 | ✔ | ✔ | ✔ |
| | T2.3 | ✔ | ✔ | ✔ |

En general, no se explicitan muchas de las técnicas que se han considerado en este trabajo. En la mayoría de ocasiones en las que los libros no utilizan una técnica pero sí quieren explicar un concepto, ponen ejemplos resueltos y a continuación proponen ejercicios para afianzar ese concepto (p. ej: aunque no se explicite la técnica de creación de una tabla de valores, sí se crean ejemplos en dónde se crean tablas de valores y a continuación se proponen ejercicios para rellenar tablas de valores. Lo mismo ocurre con el concepto de solución de un sistema). Es posible que alguna técnica que no se explicita en ninguno de los libros, como T0.1, T1.1 ó T0.2, no se exponga porque los autores consideren que esas técnicas se desprenden de la propia definición o se deberían conocer de temas anteriores.

**Tecnologías**

| Tecnologías | | Bruño | SM | Anaya |
|---|---|---|---|---|
| TG0 | TG0.1 | ✔ | ✔ | ✔ |
| | TG0.2 | ✗ | ✗ | ✗ |
| | TG0.3 | ✗ | ✗ | ✗ |
| | TG0.4 | ✗ | ✔ | ✔ |
| TG1 | TG1.1 | ✔ | ✔ | ✔ |
| | TG1.2 | ✔* | ✗ | ✗ |
| | TG1.3 | ✗ | ✗ | ✗ |
| | TG1.4 | ✔ | ✔ | ✔ |
| TG2 | TG2.1 | ✗ | ✗ | ✗ |
| | TG2.2 | ✗ | ✗ | ✗ |
| | TG2.3 | ✗ | ✗ | ✗ |

Nota : ✔* significa que simplemente se definen sistemas compatibles e incompatibles (sin entrar en consideración en sistema compatible determinado e indeterminado)

La mayoría de libros coinciden con respecto a tecnologías utilizadas. En todos se contempla tanto la definición de ecuación lineal como de sistema de ecuaciones lineales y su solución. Cabe destacar que Bruño no define lo que es la solución de una ecuación con dos incógnitas y es el único que hace una definición de sistema compatible e incompatible.

Tiene bastante sentido que no se expongan el resto de tecnologías que no aparezcan en los libros, pues la utilización de ellas supondría cierta dificultad adicional o estarían fuera de lugar en un curso como 2º ESO, especialmente las del bloque TG2.

## B3. Efectos del aprendizaje de dicha enseñanza sobre el alumnado

En general, los libros estudiados responden a una estructura parecida: introducción del objeto, institucionalización de las técnicas de resolución (gráfica y algebraicas), ejemplificación y solución de ejercicios y ejercicios para resolver aplicando las técnicas. También se trabajan cambios entre sistemas de representación de Sistemas de Ecuaciones Lineales, aunque con la misma estrategia: ejemplificación y solución de ejercicios y ejercicios para resolver a partir de los ejemplos.

Aunque sólo se hayan estudiado en profundidad unos pocos libros, la mayoría de editoriales comparten esta estructura, no habiendo observado ninguna en la que se haga un enfoque de aprendizaje a través de los problemas, o en la que haya una buena cantidad de razones de ser que se expongan antes de las técnicas o las ejemplificaciones.

Los libros, por lo tanto, se centran en la adquisición de técnicas de resolución de sistemas de ecuaciones, que aplicadas de forma mecánica resuelven problemas. El alumnado a base de repetición podrá resolver ejercicios con soltura, aunque probablemente esto dificultará un aprendizaje significativo, por su carácter procedimental.

Este tipo de presentación de contenidos favorece una dinámica de clase más centrada en la clase magistral, en la que el profesor transmite y el alumnado es espectador. No se pretende desacreditar este tipo de dinámica de clase pues tiene algunas ventajas, como puede ser el mantener el orden en clase, establecimiento de rutinas o comodidad para el docente. En contraposición el alumnado no es tan protagonista de su aprendizaje, y cómo se ha señalado, con este tipo de propuestas se pierde aprendizaje significativo.

Los resultados del análisis sobre los libros de texto coinciden en buena medida con los resultados de Ibáñez y Martínez-Juste (2020), en el que tras hacer un análisis sobre la proporcionalidad de los libros de texto, afirman que hay una carencia de tareas diversas, ricas y no rutinarias, además de que se trabajan problemas muy estereotipados para cada uno de los conceptos que se presentan. Aunque en nuestro caso el análisis de los libros de texto es sobre un tema distinto, las conclusiones tras estudiar los libros de texto pueden ser análogas.

De los efectos de este tipo de aprendizaje, podemos destacar algunos de los errores que se repiten en el alumnado y persisten año tras año, y que ponen de manifiesto las dificultades de aprendizaje del objeto. Tomamos en consideración algunos ejemplos recurrentes de errores que aparecen en Alonso et al. (1993):

- Al resolver el sistema de ecuaciones, se toma en consideración como solución del problema sólo una de las 2 variables. El alumno entiende que resolver el valor de una variable ya implica resolver el sistema, porque la otra variable "se va".
- No se tiene clara la idea de sistemas de que resolver sistemas de ecuaciones en ocasiones significa sustituir un sistema de ecuaciones por otro más sencillo. El alumnado no entiende bien las operaciones que hay que realizar para crear sistemas equivalentes. Por ejemplo, al tratar de utilizar reducción en un sistema de ecuaciones, en lugar de sumar las dos ecuaciones, sólo suma una de las variables, aludiendo que si se sumaba la otra variable "no se iba".

- El alumnado toma en cuenta sólo una de las dos ecuaciones del sistema para resolverlo, prescindiendo de la otra, dando resultados como “las dos vasijas tienen lo mismo”, al resolver un problema de vasijas y obtener $x = y$.
- Se llegan a resultados contradictorios (p. ej: $x = 2$, $x = 4$ en un sistema compatible determinado). En este caso el alumnado tampoco se preocupa por la contradicción y directamente prescinde de parte de la información para seguir resolviendo el problema.
- El alumnado tiene dificultad en separar informaciones independientes o en designar con distintas letras incógnitas diferentes.
- Problemas conceptuales a la hora de separar la relación de nociones de incógnita y ecuación por un lado y variable y función por el otro.

Este tipo de errores son síntoma de un aprendizaje pobre, sin significado y mecánico. En la mayoría de los errores, como se cita en Alonso et al. (1993) este comportamiento, se caracteriza por una estrategia mental consistente en “suprimir” parte del problema, reduciendo parte del campo de información que se da.

## C. Conocimientos previos del alumno

### C1. Conocimientos previos necesarios para afrontar el aprendizaje

Según la ORDEN ECD/489/2016, de 26 de mayo, veamos cómo se recogen los conocimientos previos necesarios para afrontar la asignatura. Encontramos en 1º ESO los siguientes conocimientos:

BLOQUE 2: Números y Álgebra:

- Iniciación al lenguaje algebraico. Traducción de expresiones del lenguaje cotidiano, que representen situaciones reales, al algebraico y viceversa.
- El lenguaje algebraico para generalizar propiedades y simbolizar relaciones. Obtención de fórmulas y términos generales basada en la observación de pautas y regularidades. Valor numérico de una expresión algebraica.
- Operaciones con expresiones algebraicas sencillas. Transformación y equivalencias.
- Ecuaciones de primer grado con una incógnita. Resolución. Interpretación de la solución. Ecuaciones sin solución. Resolución de problemas.

BLOQUE 4: Funciones:

- Coordenadas cartesianas: representación e identificación de puntos en un sistema de ejes coordenados.
- El concepto de función: Variable dependiente e independiente. Formas de presentación (lenguaje habitual, tabla, gráfica, fórmula).
- Funciones de proporcionalidad directa. Representación.

En 2º ESO, también se han adquirido, previamente al tema de ecuaciones lineales con dos incógnitas, los siguientes conocimientos en el bloque 2: números y álgebra:

- Traducción de expresiones del lenguaje cotidiano, que representen situaciones reales, al algebraico y viceversa.

- El lenguaje algebraico para generalizar propiedades y simbolizar relaciones. Obtención de fórmulas y términos generales basada en la observación de pautas y regularidades. Valor numérico de una expresión algebraica.
- Operaciones con expresiones algebraicas sencillas. Transformación y equivalencias. Identidades. Operaciones con polinomios en casos sencillos. Ecuaciones de primer grado con una incógnita (métodos algebraico y gráfico) y de segundo grado con una incógnita (método algebraico).
- Resolución. Interpretación de las soluciones. Ecuaciones sin solución. Resolución de problemas

Según esto, el alumnado está familiarizado con las ecuaciones lineales con una incógnita, así como su resolución e interpretación de la misma. También se supone que va a ser capaz de representar situaciones cotidianas mediante expresiones algebraicas simples, así como ecuaciones lineales con una incógnita y viceversa. Del bloque de funciones el alumnado conoce la ecuación de una recta y sabe representarla en distintos sistemas de representación.

La similitud de la ecuación de una recta con las ecuaciones lineales con dos incógnitas es muy grande (siempre se puede llevar una ecuación con dos incógnitas a la ecuación de una recta), pero el alumnado conoce la ecuación de una recta explicada como función, en dónde $y$ se entiende como una variable dependiente de $x$, y en donde no tiene que hacer ningún tipo de manipulación en la ecuación.

Por lo tanto el alumnado no conoce las ecuaciones lineales con dos incógnitas entendidas de modo algebraico, por lo que tampoco está demasiado familiarizado en realizar manipulaciones de mismas. Va a ser la primera vez en su formación en la que aparezcan los sistemas de ecuaciones.

## C2. Valoración de la adquisición de los conocimientos previos

Dado que el tema de sistemas de ecuaciones lineales es posterior a el tema de ecuaciones de primer y segundo grado, el profesor ya tiene una valoración de los conocimientos que tiene el alumnado de las ecuaciones lineales con una incógnita, así como su resolución e interpretación, por lo que esta prueba va a hacer hincapié en los conocimientos de representación tabular y gráfica de la ecuación de una recta.

A continuación se presenta una pequeña prueba de evaluación inicial, que se pueda responder de forma rápida (20-25 minutos), para tener una valoración de la adquisición de los conocimientos previos adquiridos relacionados con la ecuación de la recta. En función de las respuestas a esta prueba, se reforzarán más o menos algunos puntos. Esta prueba también podría generar modificaciones en la secuenciación si se considera que se debe invertir tiempo en algún tema en particular.

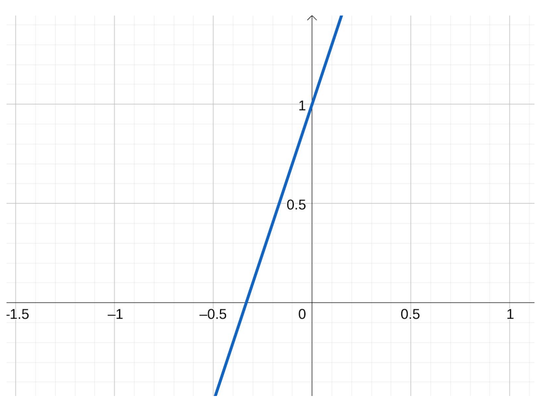
El profesor, antes de realizar la prueba, la explicará de forma oral, poniendo ejemplos y acompañará al alumnado, resolviendo dudas si es necesario.

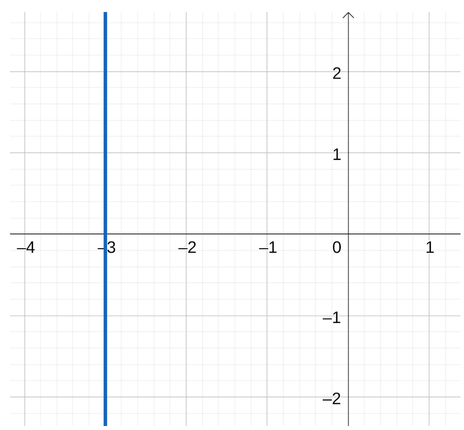
## Ficha de evaluación inicial

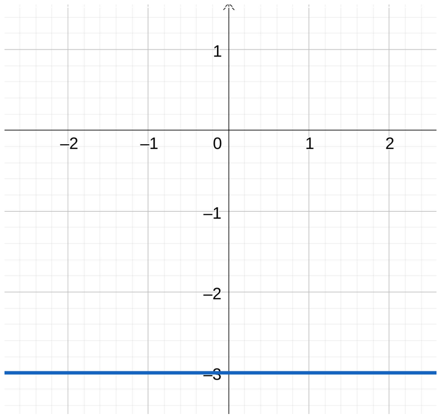
1) Dada la recta $y = 2x - 1$, rellena la siguiente tabla:

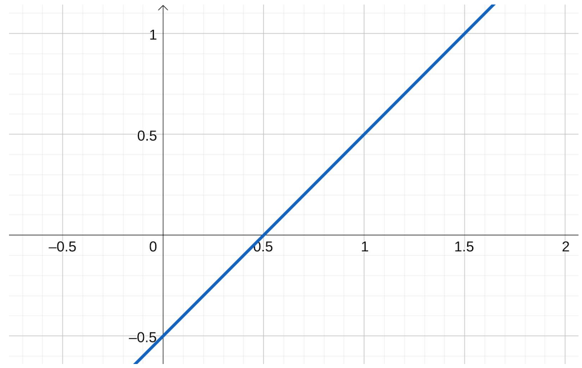
| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| y | 0 | 1 | -2 | | | |
| x | | | | 0 | 1 | -2 |

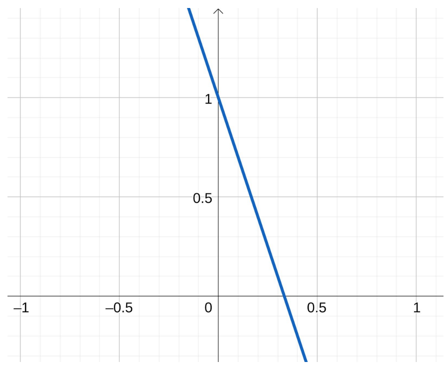
2) ¿Quién es quién? Relaciona cada una de las expresiones de las rectas con su representación gráfica. Crea una tabla de valores si lo consideras necesario:
   a) $y = 3x + 1$
   b) $y =- 3x + 1$
   c) $y = x - 1/2$
   d) y=-3
   e) x=-3






3) De las siguientes ecuaciones, ¿cuáles crees que representan la ecuación de una recta?

a) $y = 3x - 1$

b) $y - 3x = -1$

c) $2y - 6x = -2$

d) $y \cdot x = -2$

e) $y = \sqrt{x}$

f) $4y - 5x + 2 = y$

# D. Razones de ser del objeto matemático

## D1. Razón de ser histórica del objeto

Podemos encontrar muestras algebraicas de las matemáticas desarrolladas en Egipto en el Papiro de Rhind, escrito en 1650 a.C., que es una copia de otra más antigua (2000-1800 a.C.). Los problemas 24 a 34 del papiro de Rhind solucionan problemas de ecuaciones lineales de una incógnita por distintos métodos. Por ejemplo el problema 26, extraído de Pulpón (2010, p.20) enuncia: "Una cantidad y su cuarto se convierten en 15, y se pide calcular la cantidad". Este problema podría ser planteado en lenguaje matemático actual como: resuelve la ecuación $x + 1/4x = 15$ . En el papiro de Berlín, contemporáneo al papiro de Rhin, encontramos el siguiente problema, que se puede plantear a modo de sistema de ecuaciones: "Te dicen que el área de un cuadrado de 100 codos cuadrados es igual a la suma de la de otros 2 cuadrados más pequeños. El lado de uno de ellos es 1/2 + 1/4 del otro. Averigua los lados de los cuadrados." (Pulpón, 2010, p.38) , que en nuestro lenguaje algebraico actual se plantearía como: Resuelve el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 100 \\ y = 3/4x \end{cases}$$

Los babilonios hacia el año 2000 a.C., determinaban incógnitas con palabras como longitud, anchura, volumen, área… sin que tuvieran relación con problemas de medida. Podemos encontrar relación directa con un Sistema de Ecuaciones Lineales en una tabla babilónica, que plantea un problema en los siguientes términos:

*1/4 anchura + longitud = 7 manos*

*longitud + anchura = 10 manos*

Los matemáticos chinos, durante los siglos III y IV a.C. hacen una gran aportación al planteamiento y solución de sistemas de ecuaciones lineales. Concretamente, en el tratado *Nueve* *capítulos sobre el Arte Matemático,* publicado por la dinastía Han, aparece planteado el siguiente problema:

> Hay tres clases de granos; tres gavillas de primera clase, dos de la segunda clase y una de la tercera hacen 39 medidas; dos de la primera, tres de la segunda y una de la tercera hacen 34 medidas; y una de la primera, dos de segunda y tres de la tercera hacen 26 medidas. ¿Cuántas medidas de granos están contenidas en una gavilla de cada clase? (Deivi y Peña, 2006, p. 156)

Éste problema se podría enunciar en lenguaje moderno como: resuelve el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\left\{\begin{array}{rcl} 3x+2y+z & = & 39 \\ 2x+3y+z & = & 34 \\ x+2y+3z & = & 26 \end{array}\right.$$

El método utilizado para la resolución de este problema, conocido como la regla "fan-chen", es esencialmente el método de eliminación gaussiana de nuestros días.

En el siglo IV a. C. el matemático pitagórico Thyramidas de Paros ideó un método para resolver sistemas de $n$ ecuaciones lineales con $n$ incógnitas, que respondían al siguiente planteamiento de problema:

> Si se conoce la suma de n cantidades, y también la suma de cada uno de los pares que contienen a una particular de ellas, entonces esta cantidad particular es igual a $1/(n-2)$ de la diferencia entre las sumas de estos pares y la primera suma dada (Marcos, 2018)

En notación algebraica moderna, este problema podría plantearse como:

$$\begin{cases} x + x_1 + x_2 + \ldots + x_{n-1} = S \\ x + x_1 = a_1 \\ x + x_2 = a_2 \\ \quad \vdots \\ x + x_{n-1} = a_{n-1} \end{cases}$$

y tiene por solución:

$$x = \frac{1}{n-2}[(a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1}) - S]$$

Cabe mencionar al matemático griego Diofanto, del siglo III d. C., del cual su mayor obra conocida es *Arithmetica,* que proporciona una gran contribución al álgebra aportando ideas muy originales. En *Arithmetica* Diofanto trata muchos problemas algebraicos, reduciendo muchos de ellos a problemas más simples, como problemas lineales. A modo de ejemplo citamos un problema, que se puede plantear como de ecuaciones lineal. Tal problema es el problema 1 del libro I:

"Descomponer un número dado en dos partes cuya diferencia sea dada" (Medina y Albarracín, p.53-54).

A modo de ejemplo descompone el número 100 con una diferencia dada de 40 unidades utilizando el siguiente lenguaje (un aritmo, $\varsigma$, es una cantidad desconocida; es lo que en nuestro lenguaje moderno denotaríamos como $x$):

"Sea 100 el número dado y 40 la diferencia. Suponiendo que la parte menor es 1 aritmo, la mayor será el aritmo más 40 unidades, y por tanto, la suma de ambas valdrá 2 aritmos más 40 unidades…" (Medina y Albarracín, p.53-54)

Este problema puede ser presentado en lenguaje moderno del siguiente modo:

$$\begin{cases} x + y = 100 \\ x - y = 40 \end{cases}$$

Aquí Diofanto básicamente plantea que si $y = \varsigma$, entonces, $x = \varsigma + 40$, de manera que aunque Diofanto desconozca el método de sustitución, lo está aplicando de forma intuitiva para reducir un sistema de dos ecuaciones lineales a una sola ecuación, quedando:

$$x + y = 2\varsigma + 40 \Rightarrow 2\varsigma + 40 = 100$$

lo cual le permite resolver fácilmente el problema.

En general, los problemas presentados en *Artihmetica* son de mucha mayor complejidad de resolución que el ejemplo citado.

## D2. Razón de la introducción escolar del objeto y coincidencia con las razones históricas

Como se ha visto en el apartado anterior, las razones de ser históricas de las ecuaciones lineales, los sistemas de ecuaciones en general y los sistemas de ecuaciones lineales en particular están estrechamente ligadas a la solución de problemas en los que se puede expresar una relación existente entre dos valores desconocidos. Muchos de los problemas planteados modelizan situaciones de problemas reales que aparecían fruto de tratar de calcular medidas, hacer repartos equitativos o resolver problemas geométricos. Otros problemas, aunque sí podrían ser aplicados posteriormente a problemas reales, simplemente son problemas más propios del álgebra, en los que se trata directamente con una variable desconocida, sin que ésta tenga relación directa con magnitudes tangibles.

La razón de la introducción escolar del objeto va a ser precisamente la solución de problemas en los que hay una relación entre dos variables desconocidas, por lo que sí hay coincidencia entre la razón de ser histórica del objeto y la razón de ser escolar. En la propia introducción del objeto escolar, se van a citar problemas históricos para que se tenga en cuenta la importancia histórica del objeto. Sin embargo, los problemas que se van a tratar al introducir escolarmente el objeto, van a contemplar muchos más contextos y además contextos actuales (problemas geométricos, numéricos, de mezclas, de edades, comerciales...), se van a poder interpretar de más maneras (como solución de intersección de rectas, problemas de balanzas...) y además se van a contemplar métodos (técnicas) de resolución que no estaban contemplados históricamente.

## D3. Problemas que constituyen razones de ser del objeto

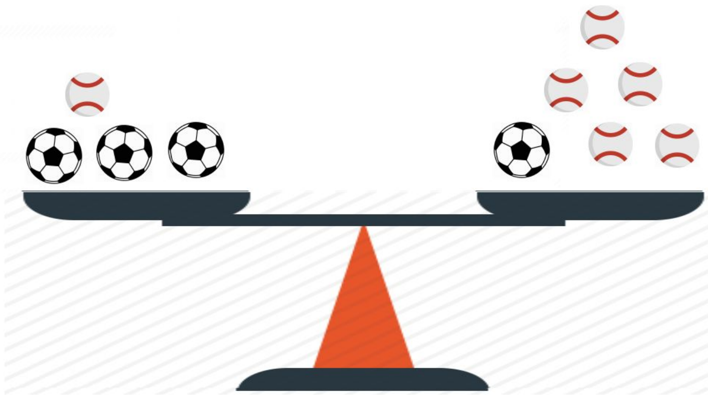
Las razones de ser que se presentan a continuación, pretenden que el alumnado pueda entender de forma autónoma y a través de la resolución de problemas los conceptos más significativos sobre las ecuaciones lineales y los Sistemas de Ecuaciones Lineales con 2 incǵonitas. Además de buscar la comprensión de lo que es una ecuación lineal y un sistema de ecuaciones, éstas razones se centrarán en que el alumnado indague y entienda por sí mismo las operaciones que dejan invariante una ecuación y un sistema de ecuaciones, así como la relación entre los sistemas de representación gráfico-algebraico y las soluciones las mismas.

La comprensión de las operaciones que dejan invariante una ecuación o un sistema de ecuaciones es un concepto que en muchas ocasiones los alumnos no suelen tener claro, y cuyo entendimiento sienta una base que facilita la implantación de técnicas a posteriori, y por lo tanto la resolución de problemas relacionados con ecuaciones lineales y sistemas de ecuaciones lineales. Es por esto que se presentan algunas de las razones de ser utilizando el modelo de balanzas.

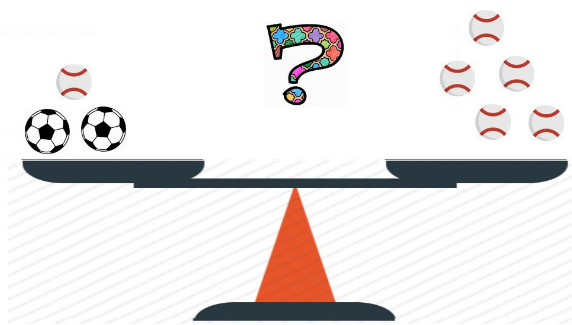
El modelo de balanzas permite dar una idea visual y facilita la comprensión de ecuación, así como las operaciones válidas para crear ecuaciones y sistemas equivalentes. Galeano y Váquiro (2015 p. 157-158), en un trabajo sobre investigación utilizando el modelo virtual de balanza afirman: "El uso del modelo virtual de la balanza en la resolución de ecuaciones de primer grado con una incógnita propició un escenario en que los estudiantes lograron tomar conciencia sobre la necesidad de mantener la equivalencia en las ecuaciones" ó "es posible indicar que algunas de las dificultades asociadas a la resolución de ecuaciones de primer grado [...] se logran superar haciendo uso del modelo virtual de la balanza". Otros autores, como Alonso et al. (1993), exponen: "La balanza es especialmente apta para estos propósitos por su capacidad autocorrectora, ya que traduce, físicamente, el concepto de igualdad a través del equilibrio de las masas de los platillos.".

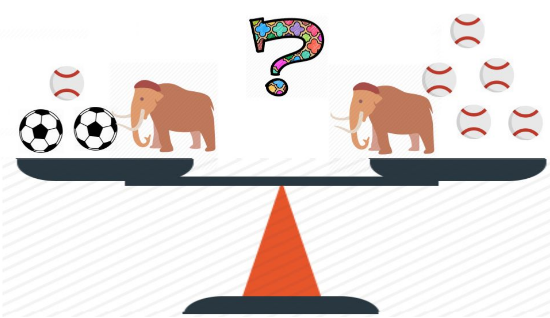
**Razón de ser 1:**

Sabiendo que la balanza que se muestra a continuación está en equilibrio,



- ¿Cuáles de las siguientes balanzas están en equilibrio? ¿Por qué?





- Sólo con la información de que la primera balanza está en equilibrio… ¿Puedes relacionar el peso del mamut con el de las pelotas? Y si la última balanza estuviera en equilibrio, ¿ podrías relacionarlo? ¿Qué relación tendría?
- ¿Cómo puedes obtener una relación entre el peso de las pelotas de fútbol y las de béisbol? Si consideramos la incógnita $x$ = "número de pelotas de fútbol" e $y$ = "número de pelotas de béisbol", crea una fórmula que relacione $x$ con $y$.
- Rellena la siguiente tabla de valores

| **Pelotas de Fútbol** | 1 | 2 | 4 | 6 |
|---|---|---|---|---|
| **Pelotas de Béisbol** | | | | |

- Representa gráficamente la relación entre la variable $x$ e $y$ ayudándote de la tabla anterior. ¿Cuántos valores de la tabla anterior hubieran sido suficientes para representar la tabla?

Con este problema se tratan ecuaciones lineales con dos incógnitas y se buscan manipulaciones de las mismas para encontrar ecuaciones lineales equivalentes. Se trabaja además la idea de modelizar matemáticamente una situación real y representarla en modo de tabla y gráficamente. Éste problema se centra por tanto en reforzar e introducir el campo de problemas **CP0** (**CP0.2** y **CP0.3**). En este problema se pretende que el alumnado trate de llegar a conclusiones sobre técnicas **T0.2**, **T0.3** y **T0.4**, lo cual ayudará a institucionalizarlas posteriormente.

**Razón de ser 2 :**

Las imágenes utilizadas para la razón de ser 2 están extraídas de Anaya (2012)

Problema 1:

Si consideramos la incógnita $x$ = "Precio de los pasteles" e $y$ = "Precio de la rosquilla":

- Observando el primer dibujo, plantea una ecuación que relacione $x$ e $y$. A continuación completa la siguiente tabla:

| **Precio pastel** | 0.5 | 1 | | | 4 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| **Precio rosquilla** | | | 2.5 | 3.5 | | |

- Observando el segundo dibujo, plantea una ecuación que relacione $x$ e $y$. A continuación completa la siguiente tabla:

| **Precio pastel** | 0.5 | 1 | | | 4 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| **Precio rosquilla** | | | 2.5 | 3.5 | | |

- Observa ambas tablas para dar una solución al precio de las rosquillas y los pasteles.

Problema 2:


Si consideramos la incógnita $x$ = "Edad de Eduardo" e $y$ = "Edad de la señora":

- Fijándote en la frase: "Estamos hechos unos chavales: entre los dos,150 años", plantea una ecuación que relacione $x$ e $y$. A continuación completa la siguiente tabla:

| **Edad Eduardo** | | | 70 | 78 | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| **Edad Señora** | 50 | 55 | | | 79 | 90 |

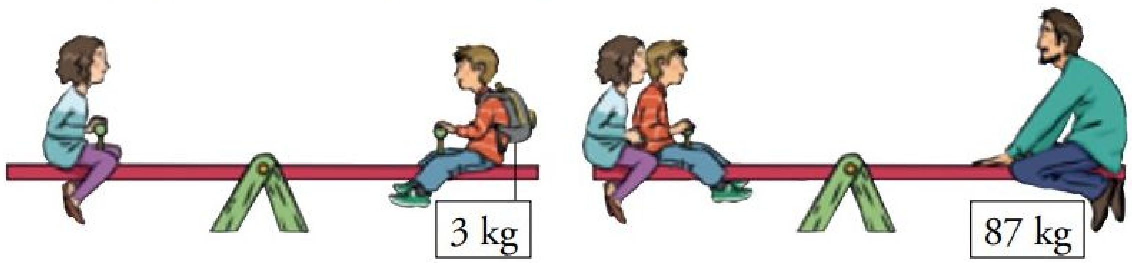
- Fijándote en la frase: "Sí, pero yo sigo siendo 6 años más joven que tú", plantea una ecuación que relacione $x$ e $y$. A continuación completa la siguiente tabla:

| **Edad Eduardo** | | | 70 | 78 | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| **Edad Señora** | 50 | 55 | | | 79 | 90 |

- Observando ambas tablas, encuentra una solución para las edades de ambos.

Problema 3:

***Sara, en el balancín, se equilibra con Alberto, su hermano menor, que lleva una mochila de 3 kilos y juntos, sin mochila, se equilibran con su padre, que pesa 87 kilos. ¿Cuánto pesa cada uno?***




Consideramos la incógnita $x$ = "Peso de Sara" e $y$ = "Peso de Alberto":

- Fijándote en la primera balanza, plantea una ecuación que relacione $x$ e $y$. A continuación completa la siguiente tabla:

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| **Peso de Sara** | | | 46 | | 50 | |
| **Peso de Alberto** | 40 | 41 | | 44 | | 50 |

- Plantea una ecuación que relacione $x$ e $y$ en la segunda balanza y completa la tabla :

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| **Peso de Sara** | | | 46 | | 50 | |
| **Peso de Alberto** | 40 | 41 | | 44 | | 50 |

- Observando ambas tablas, ¿puedes encontrar la relación entre el peso de Sara y Alberto? ¿Significa que no es posible encontrar la relación entre el peso de Sara y Alberto?

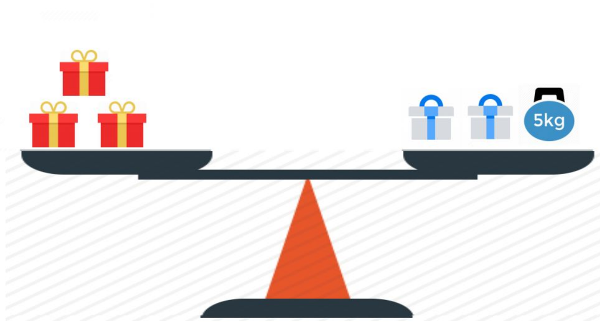
¿Podrías encontrar la relación entre el peso de sara y Alberto si hubiera más valores en la tabla?

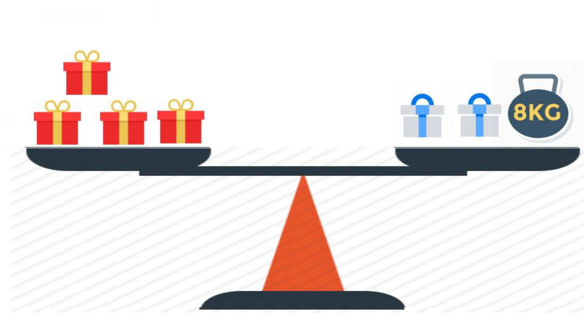
En este problema se tratan problemas cotidianos que se pueden representar con ecuaciones lineales con dos incógnitas. Se trata por tanto, de modelizar matemáticamente una situación real y representarla en modo de tabla para encontrar soluciones. Se tratan los siguientes campos de problemas: **CP0.3, CP1.3 y CP2**. Se refuerzan las técnicas **T0.3,** pretendiendo que el alumnado trate de llegar a conclusiones sobre la técnica **T2.1.**

**Razón de ser 3:**

Problema 1:

Observa las siguientes balanzas y contesta a las preguntas:




- ¿Cuánto pesa cada caja roja?
- ¿Y cada caja azul?

Si representamos con $x$ = “Peso de las cajas rojas” e $y$ = “Peso de las cajas azules”, obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} 3x = 2y + 5 \\ 4x = 2y + 8 \end{cases}$$

¿Con qué operación entre las dos ecuaciones podemos obtener el peso de una caja roja?

Problema 2:

Un quiosquero vende latas y botellas. Si:

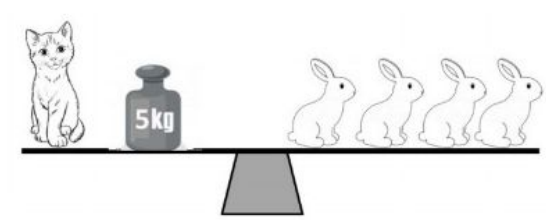
- 3 latas y 4 pilas botellas 30.7 Euros
- 1 lata  y 2 botellas cuestan 11.2 Euros.

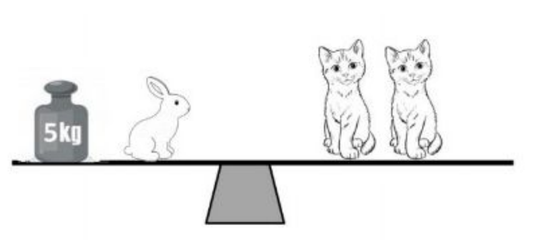
¿Cuánto costarán:

- 6 latas y 8 botellas?
- 4 latas y 6 botellas?
- 2 latas y 2 botellas?
- 1 lata y 1 botella?
- 1 botella?
- 1 lata?

Problema 3

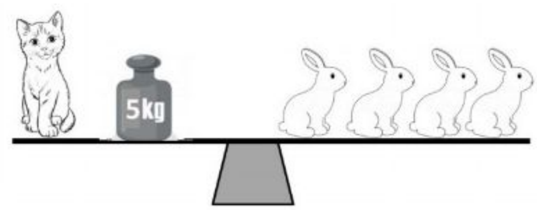
Jugando con el equilibrio, explica con balanzas, los movimientos que vas realizando para averiguar cuánto pesa el gato, y cuánto pesa el conejo.



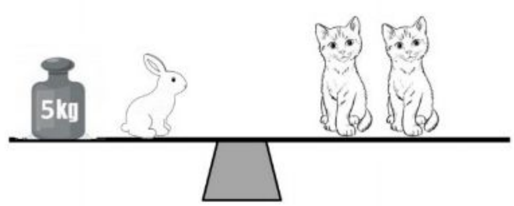

Aunque hayamos resuelto el problema "jugando" con movimientos de la balanza, vamos a enfocarlo de otro modo: consideramos la incógnita $x$ = "número de conejos" e $y$ = "número de gatos".

- Crea una fórmula que relacione $x$ con $y$ para la siguiente imagen:



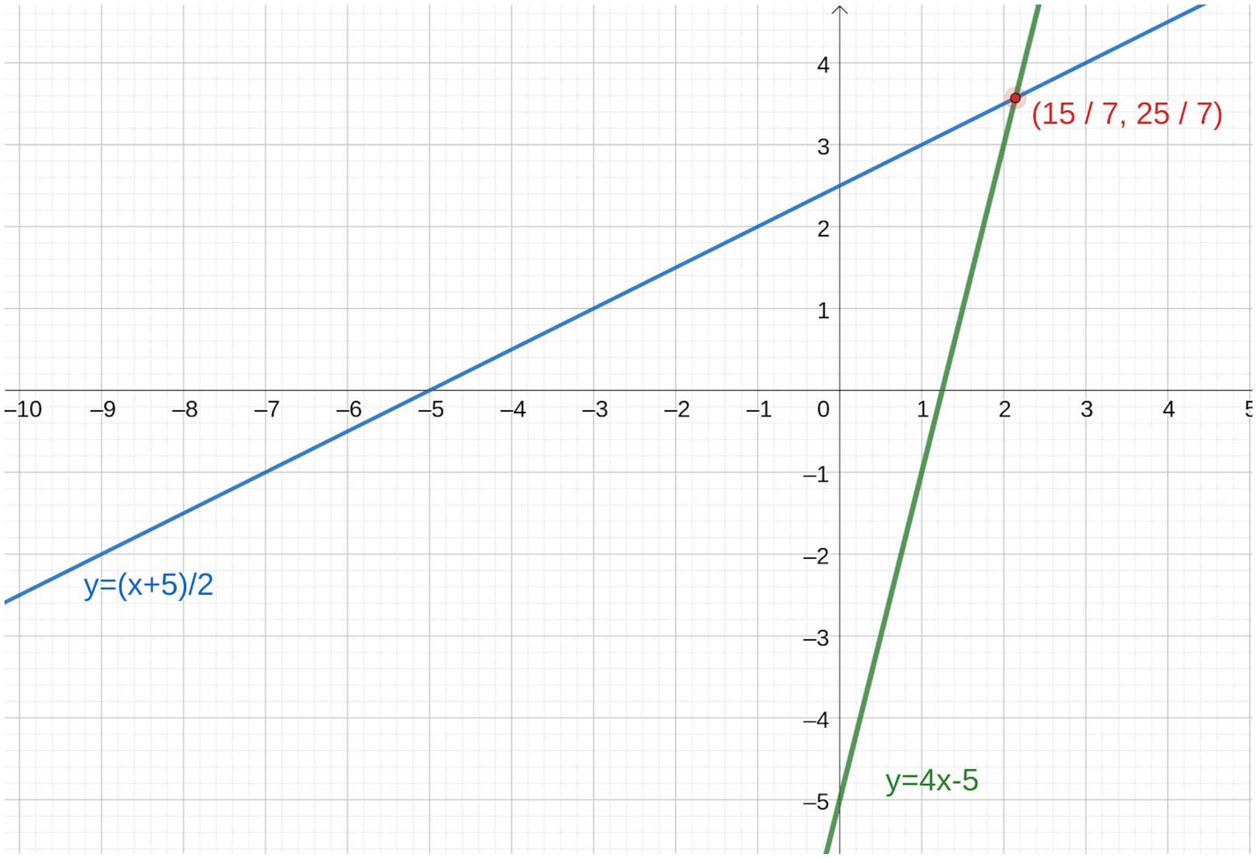

Haz una tabla de valores para $x$ e $y$ y representa gráficamente la relación entre $x$ e $y$.

- Crea una fórmula que relacione $x$ con $y$ para la siguiente imagen:




Haz una tabla de valores para $x$ e $y$ y representa gráficamente la relación entre $x$ e $y$.

- Observa la gráfica que se muestra a continuación. ¿Qué relación crees que tiene con el problema y qué significa el punto de intersección de las dos gráficas?




- ¿Crees que sería fácil encontrar una solución a este problema utilizando tablas?

| |
|---|
| En este problema se trata un sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas y se trata de introducir la idea de sistemas de ecuaciones equivalentes con la balanza. Se sigue reforzando la idea de modelizar matemáticamente una situación real y representarla en modo de tabla y gráficamente. Finalmente se introduce la idea de resolución gráfica de sistemas de ecuaciones. Éste problema se centra en reforzar **CP0.3** y reforzar **CP1.3** e introducir el campo de problemas **CP1.2**. Se pretende que el alumnado trate de llegar a conclusiones sobre **T1.2** y **T1.3** así como que entienda la idea de **T2.3-c y T2.2.** |

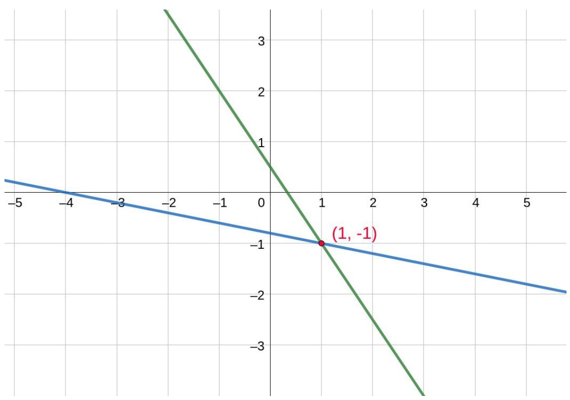
**Razón de ser 4:**

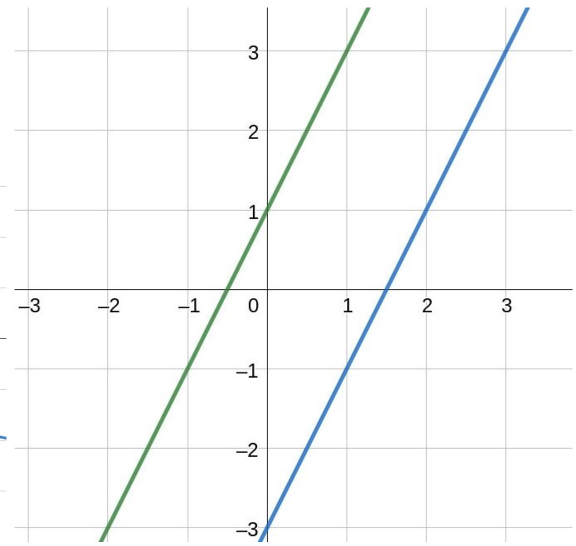
Problema 1: ¿Quién es quién?

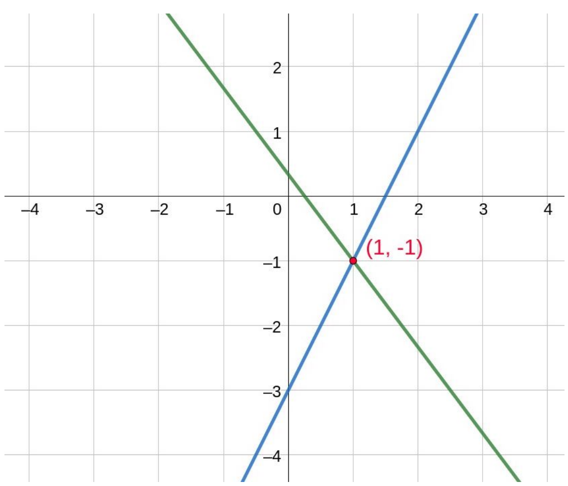
Relaciona cada sistema de ecuaciones con su representación gráfica. Crea una tabla de valores para cada una de las ecuaciones, con al menos 2 valores, para ayudarte a identificar cada una de las ecuaciones.

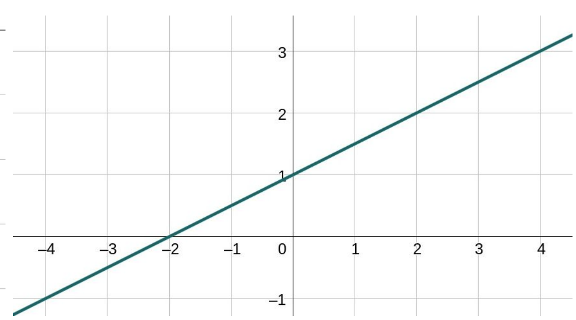
$$a)\begin{cases} 4x+3y=1 \\ 2x-y=3 \end{cases} \qquad b)\begin{cases} 2x+3y=1 \\ 5y+x=-4 \end{cases}$$

$$c)\begin{cases} -4x+2y=2 \\ 2x-y=3 \end{cases} \qquad d)\begin{cases} -x+2y=2 \\ 2x-4y=-4 \end{cases}$$





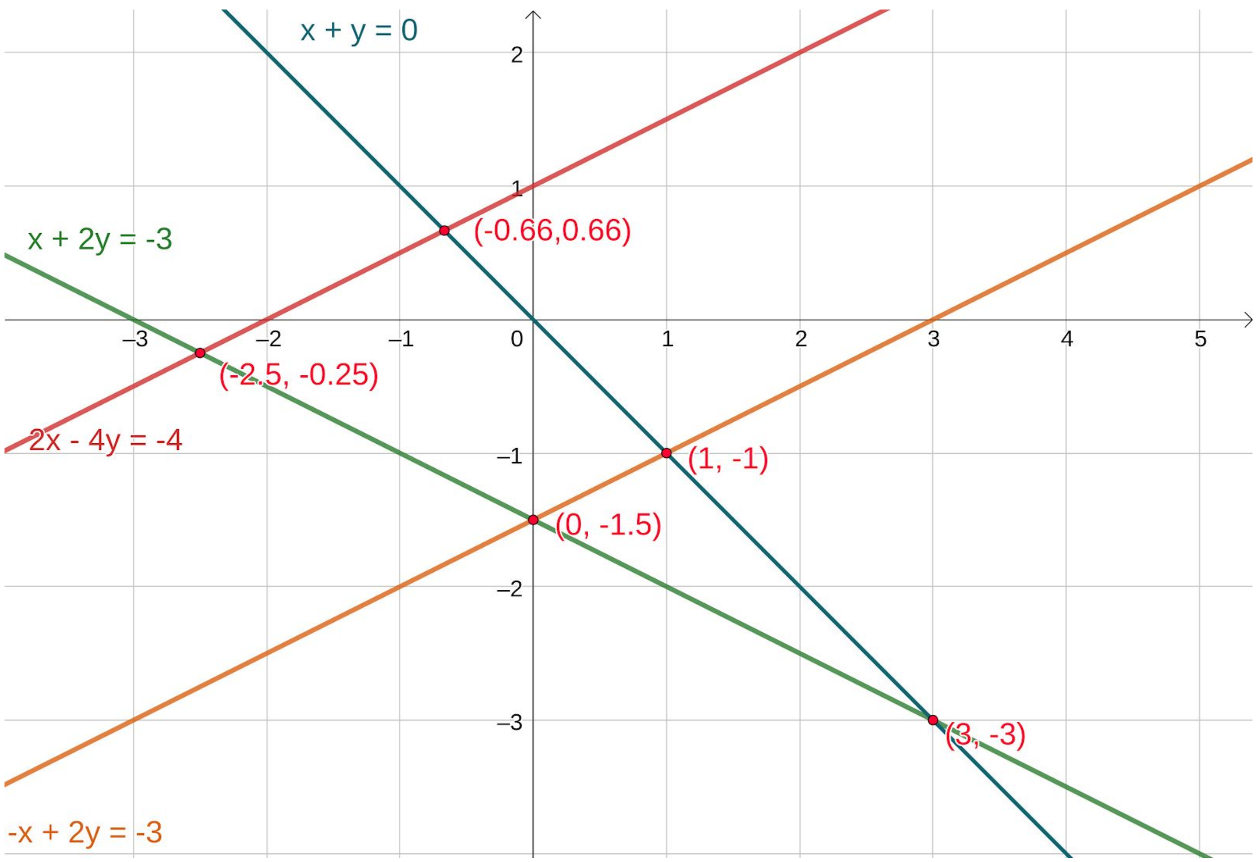



Recuerda que cada punto de la recta representa una solución de cada una de las ecuaciones del sistema:

- ¿qué significa si un punto está en las dos rectas?
- ¿Sabrías decir cuáles son las soluciones de los distintos sistemas observando las gráficas?
- ¿Hay algún sistema que no tenga solución? ¿Cómo son las rectas de ese sistema?
- ¿Hay algún sistema que tenga más de una solución? ¿Cómo son las rectas de ese sistema?

Problema 2:

Observa la siguiente en la que se representan 4 ecuaciones lineales con 2 incógnitas:




- ¿Cuál es la solución de los siguientes sistemas de ecuaciones?

$$a)\begin{cases} 2x-4y=4 \\ x+y=0 \end{cases} \qquad b)\begin{cases} -x+2y=-3 \\ x+2y=-3 \end{cases} \qquad c)\begin{cases} -x+2y=-3 \\ x+y=0 \end{cases}$$

- Encuentra un sistema de ecuaciones que tenga por solución $x = 3$ , $y = -3$
- ¿Hay algún sistema de ecuaciones que no tenga solución? ¿Cuál/es?
- ¿Hay algún sistema de ecuaciones que tenga más de una solución? ¿Cuál/es?

En este problema se trata la representación gráfica de sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas. y se introduce la idea de resolución gráfica de sistemas de ecuaciones. Éste problema se centra en reforzar **CP0.3**. Aparece también el campo **CP2,** y se pretende que el alumnado trate de llegar a conclusiones y acabe comprendiendo **T2.2.**

## D4. Metodología para implementar en el aula el objeto

Las razones de ser citadas en el párrafo anterior, van a definir en cierto modo la metodología a seguir para implementar el objeto matemático a tratar. Se pretende que en líneas generales los propios problemas hagan reflexionar e indagar hacia la búsqueda de estrategias para resolverlos, de manera que el alumno pueda ir construyendo el conocimiento de forma autónoma y que reflexione tanto de los conocimientos adquiridos previamente, como sobre los nuevos conocimientos adquiridos, así como permitir que aparezcan sus propias conclusiones. Se buscará alejarse de las clases magistrales en las que profesor toma todo el protagonismo y el alumnado actúa de una forma más pasiva, siendo el objetivo del profesor guiar al alumnado en la construcción de su propio aprendizaje.

La metodología también debe contemplar ser flexible y adaptativa, debido a la posible heterogeneidad de los grupos con los que se vayan a impartir las clases y de las reacciones, respuestas y avance del alumnado ante la forma en la que vayan evolucionando las clases.

## Enseñanza a través de la resolución de problemas

Según Bingolbali y Bingolbali (2019), el concepto de enseñanza a través de la resolución de problemas se basa en enfrentar a los escolares a situaciones problemáticas sin haber recibido instrucción previa, eligiendo tales problemas de manera que promuevan la reflexión e indagación hacia la búsqueda de estrategias que permitan resolverlos. Gaulín (2001) considera que los pedagogos más ambiciosos buscan el siguiente enfoque: "lo importante para realmente enfatizar la resolución de problemas, no es resolver más problemas o aplicarlos en la vida cotidiana, lo importante es utilizar la resolución de problemas como el mejor vehículo para enseñar todo, enseñar a través de resolver problemas".

Los problemas elegidos van a ejemplificar y dar sentido al objeto matemático a tratar. Se buscará por lo tanto un tipo de metodología a través de los problemas, es decir, una metodología en donde los propios problemas sean el centro del aprendizaje del alumnado, y a través de ellos se pueda institucionalizar el objeto, así como aprender las técnicas y tecnologías asociadas al mismo. Un esquema de aprendizaje basado en problemas (no se tiene por qué seguir necesariamente el esquema al pie de la letra, pues deberemos adaptarnos en todo momento) puede ser el siguiente:

- Trabajo individual para entender el problema y puesta en común en pequeños grupos formados para la resolución de los problemas planteados.
- Discusión entre el profesor y los alumnos, puesta en común y debate acerca de las nuevas dudas y problemas surgidos.
- Institucionalización del objeto a tratar, pudiendo apoyarse en los problemas anteriores para dar sentido al objeto. Explicación de diversas estrategias, herramientas y distintos enfoques posibles para resolver los problemas.
- Propuesta de problemas de consolidación, con herramientas y estrategias para solucionar los problemas y propuesta de más problemas de dificultad creciente que permitan consolidar la comprensión del objeto y la heurística de la solución de los problemas.

- Puesta en común, en la que de nuevo se vuelvan a plantear dudas y problemas surgidos y las soluciones y estrategias que se han elegido para solucionarlos.

## E. Campo de problemas

A continuación se citan los campos de problemas que se presentarán en el aula. Al describir cada uno de los campos de problemas, se citan posteriormente ejemplos de problemas asociados a los campos de problemas que se tratan. Tales problemas son problemas específicos relacionados directamente con el campo de problemas.

Un campo de problemas que va a aparecer es: cambios entre sistemas de representación, por lo que citaremos a continuación los distintos sistemas de representación que pueden encontrarse:

- Lenguaje natural
- Tabular
- Gráfico
- Algebraico

**CP0: Asociados a ecuaciones lineales con 2 incógnitas:**

- **CP0.1:** *Distinguir y reconocer ecuaciones lineales con 2 incógnitas*.
  Este campo hace referencia a la distinción y reconocimiento de las ecuaciones lineales así como su morfología. Pretende que se conozcan qué términos (o variables) pueden aparecer en ecuaciones lineales y cuáles no.
  - **Probema 0.1.1:** Identifica cuáles de las siguientes ecuaciones son lineales:
    a) $3^2 + x + y = 9$
    b) $xy + 5 = 8$
    c) $x + 9x + 5 \cdot 9 = 0$
    d) $y^2 + x = 6$
    e) $x + 7 = 1/y$

- **CP0.2:** *Conocer y generar ecuaciones lineales con 2 incógnitas equivalentes*.

En este campo se pretende que se conozcan todas las operaciones que dejan invariante una ecuación lineal para llegar a otras equivalentes.

- **Problema 0.2.1:** Dada la siguiente ecuación $4x - 2y + 5 = 3$, señala cuáles son equivalentes:
  a) $-4x + 2y - 5 = -3$
  b) $2x - y = -1$
  c) $100 + 2x - y = 99$
  d) $400x - 200y + 500 = 300$

- **Problema 0.2.2:** Dada la siguiente ecuación, $3x + 8y = 7$, rellena □ para obtener ecuaciones equivalentes:
  a) $-3x - 8y =$ □
  b) $9x + 24y =$ □
  c) $6x + 8y +$ □ $= 7$
  d) 8y-7= □

- **Problema 0.2.3:** Dada la ecuación $-x + 3y + 8 = 12$, genera 3 ecuaciones equivalentes.

- **CP0.3:** *Cambios entre sistemas de representación de las ecuaciones lineales.*

Dado un problema planteado en lenguaje habitual, representarlo en forma de ecuación con 2 incógnitas.

- **Problema 0.3.1:** Utiliza incógnitas $x$ e $y$ para los valores desconocidos y pon en forma de ecuación los siguientes problemas:
  a) "He pagado 5 euros por 3 kg. de manzanas y 4 kg. de melocotones"
  b) "La suma de dos números desconocidos es 100"
  c) "Entre Luis y su mochila pesan 50 kg"

Dada una ecuación con 2 incógnitas, encontrar problemas en lenguaje habitual de manera que respondan a la ecuación dada.

- **Problema 0.3.2:** Enuncia un problema real cuya interpretación matemática sea: $2x + 5y = 10$

Creación de tabla de valores a partir de una ecuación lineal con 2 incógnitas

- **Problema 0.3.3:** Dada la siguiente ecuación lineal $3x - 8y = -5$, haz una tabla de valores para $x$ e $y$ con al menos 5 valores distintos.
- **Problema 0.3.4:** Dada la ecuación lineal $-5x + 3y = 1$, rellena la siguiente tabla:

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| x | -5 | -2 | | 0 | | 3 | |
| y | | | 0 | | -5 | | 5 |

Representar gráficamente una ecuación lineal con 2 incógnitas

- **Problema 0.3.5:** Representa gráficamente la siguiente ecuación lineal: $2y - 5x = 4$

Encontrar una ecuación con 2 incógnitas que tenga por solución un valor o valores determinados:

- **Problema 0.3.6:** Encuentra dos ecuaciones lineales que tengan por solución $x = 0, y = 2$ y una ecuación lineal que tenga por solución $x = 0, y = 2$, x $x = 1, y = 4$

**CP1: Asociados a sistemas de ecuaciones lineales con 2 incógnitas:**

- **CP1.1:** *Distinguir y reconocer un sistema de ecuaciones lineales con 2 incógnitas.*

Este campo hace referencia a la distinción y reconocimiento de sistemas de ecuaciones lineales así como su morfología. Pretende que se conozcan qué términos (o variables) pueden aparecer en estos sistemas y cuáles no.

- **Problema 1.1.1:** De entre los siguientes sistemas de ecuaciones, indica cuáles son lineales y cuáles no:

$$a)\begin{cases}-5^2x+2y=-3\\ x+y=0\end{cases} \quad b)\begin{cases}-5x^2+2y=-3\\ x+y=0\end{cases} \quad c)\begin{cases}5/y+x=2\\ 2x+y=4\end{cases}$$

$$d)\begin{cases}\sqrt{5}x+2y=1\\ 2^9x+3.257y=9\end{cases} \quad e)\begin{cases}\sqrt{x}+2y=1\\ x+3y=8\end{cases} \quad f)\begin{cases}xy+x=1\\ -x+2y=6\end{cases}$$

- **CP1.2:** *Crear sistemas equivalentes a uno dado mediante el uso de operaciones elementales.*
  En este campo se pretende que se conozcan todas las operaciones que dejan invariante un sistema de ecuaciones lineales para llegar a otros sistemas equivalentes.

- **Problema 1.2.1:** Dado el siguiente sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas:

$$\begin{cases}2x-y=0\\ -x+y=1\end{cases}$$

¿Qué sistemas son equivalentes al sistema dado?

$$a)\begin{cases}-2x+y=0\\ -x+y=1\end{cases} \quad b)\begin{cases}x-1/2y=0\\ -x+y+5=6\end{cases}$$

$$c)\begin{cases}-3x+2y=1\\ x-y=-1\end{cases} \quad d)\begin{cases}2x+y=0\\ x-y=-1\end{cases}$$

$$e)\begin{cases}2x-y=0\\ 2(y+1)=4x+2\end{cases}$$

Sabiendo que $x = 1,\ y = 2$ es solución del sistema dado, ¿se puede afirmar que si $x = 1,\ y = 2$ no es solución del sistema entonces los sistemas no son equivalentes al sistema de ecuaciones dado? ¿cualquier sistema que tenga como solución $x = 1,\ y = 2$ es equivalente al sistema dado? (observa el apartado e) antes de responder a esta última pregunta)

- **Problema 1.2.2:** Encuentra 3 sistemas de ecuaciones lineales equivalentes al siguiente sistema:

$$\begin{cases} 2x - 3y = 3 \\ 5x + y = 2 \end{cases}$$

- **Problema 1.2.3:** Para llegar del sistema de ecuaciones 1) al sistema de ecuaciones 2), se ha multiplicado la primera ecuación por 2, y se ha sustituido la segunda ecuación por la suma de la primera ecuación y la segunda:

$$1) \begin{cases} 2x - y = 3 \\ -x - 3y = 1 \end{cases} \qquad 2) \begin{cases} 4x - 2y = 6 \\ x - 4y = 4 \end{cases}$$

Si la solución del primer sistema de ecuaciones es $x = 8/7,\ y = -5/7$, ¿sabrías decir cuál es la solución del sistema de ecuaciones 2) sin hacer operaciones?

- **CP1.3:** *Cambios entre sistemas de representación de los sistemas de ecuaciones lineales.* En este campo se consideran problemas de cambio de representación entre los distintos sistemas de representación: lenguaje natural, algebraico, gráfico y tabular.

Modelizar un problema en lenguaje habitual a un sistema de ecuaciones con 2 incógnitas: dado un problema planteado en lenguaje habitual que se pueda representar en un sistema de ecuaciones con dos incógnitas, representarlo en lenguaje matemático.

- **Problema 1.3.1:** “He comprado 3 bolsas de cromos de un tipo y 4 bolsas de cromos de otro tipo (siempre salen los mismos cromos). Al contar los cromos de las dos bolsas me han salido 70 cromos. El otro día compré una bolsa de cada y en total tenía 17 cromos. ¿Cuántos cromos salen en cada bolsa?"
- **Problema 1.3.2:** “En mi garaje tengo 7 vehículos entre coches y motos.
  Si en total hay 24 ruedas, ¿cuántos coches tengo?¿Y cuántas motos?”

Ejemplificar un sistema de ecuaciones con 2 incógnitas a situaciones propias de la realidad: dado un sistema de ecuaciones con 2 incógnitas, encontrar problemas en lenguaje habitual que puedan ser representados mediante el sistema de ecuaciones dado.

- **Problema 1.3.3:** Enuncia un problema que tenga por solución el siguiente sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas:

$$\begin{cases} 4x + y = 6 \\ x + 5y = 11 \end{cases}$$

Conocer y comprender el concepto de solución de un sistema: conocer qué debe cumplir un par de valores dado $(x_0, y_0)$ para ser solución de un sistema de ecuaciones lineales dado.

- **Problema 1.3.4:** Dados los valores $x = 1;\ y = 3$, ¿de qué ecuaciones son solución?

$$a)\begin{cases} 2x + y = 5 \\ x + 2y = 4 \end{cases} \qquad b)\begin{cases} 3x + 2y = 9 \\ -x + y = 2 \end{cases} \qquad c)\begin{cases} 3x - 4y = -9 \\ -x - y = -5 \end{cases}$$

- **Problema 1.3.5:** Dado el siguiente sistema de ecuaciones,

$$\begin{cases} 4x - 2y = 4 \\ -2x + 3y = -2 \end{cases}$$

¿Es alguno de estos pares solución del sistema?:

a) $x = 1;\ y = 3$

b) $x = 2;\ y = 1$

c) $x = 1;\ y = 0$

d) $x = 3;\ y = 2$

- **Problema 1.3.6:** Encuentra dos sistemas de ecuaciones que tengan por solución: $x = 2;\ y = 1$ CP2: Asociados a la resolución de sistemas de ecuaciones lineales

Para este campo de problemas se considerarán distintas representaciones de sistemas de ecuaciones lineales y se pedirá su resolución. Se citan ejemplos de problemas representados de forma algebraica, que serán resueltos utilizando las técnicas que el alumnado considere oportunas.

- **Problema 2.1:** Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones del modo que consideres más oportuno:

$$a)\begin{cases} x+y=6 \\ 2x-2y=4 \end{cases} \quad b)\begin{cases} x+2y=20 \\ x-y=5 \end{cases} \quad c)\begin{cases} x+y=-2 \\ x-y=0 \end{cases}$$

$$d)\begin{cases} 3x+y=10 \\ x+3y=6 \end{cases} \quad f)\begin{cases} 5x-4y=28 \\ -3x+y=-7 \end{cases} \quad g)\begin{cases} 3x-4y=26 \\ x-8y=22 \end{cases}$$

$$h)\begin{cases} 2x+3y=16 \\ -4x-6y=20 \end{cases} \quad i)\begin{cases} x-3y=5 \\ -4x+12y=-20 \end{cases}$$

**CP-P1: Problemas de refuerzo ecuaciones equivalentes y definición de tipos de sistemas**

Todos los sistemas de ecuaciones que se han visto hasta ahora eran sistemas de ecuaciones que tenían una única solución. Cuando un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas tiene una única solución se denomina **sistema compatible determinado.**

Dada la siguiente ecuación lineal:

$$6x + 4y = 8$$

- Represéntala gráficamente
- ¿Cuáles de las siguientes ecuaciones son equivalentes a esta?

**a)** $3x + 2y = 8$ **b)** $-12x - 8y = -16$ **c)** $12x = 16 - 16y$

**d)** $1.5x + y = 4$ **e)** $12x + 8y - 8 = 8$ **f)** y=(-3x+8)/2

- Representa gráficamente la ecuación **b)**
- Considera el siguiente sistema de ecuaciones formado por la ecuación inicial y la ecuación **b)**

$$\begin{cases} 6x + 4y = 8 \\ -12x - 8y = -16 \end{cases}$$

  - ¿Cuántas soluciones crees que existen a este problema?
  - Un sistema con infinitas soluciones se denomina **sistema compatible indeterminado.**

- Considera el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} 6x + 4y = 8 \\ 3x + 2y = 8 \end{cases}$$

  - ¿Cuántas soluciones crees que existen a este problema?
  - Un sistema sin solución se denomina **sistema incompatible.**
- Inventa un sistema compatible indeterminado y un sistema incompatible.
- Completa la siguiente frase: Un sistema formado por dos ecuaciones equivalentes es un…
  - Sistema compatible indeterminado
  - Sistema compatible determinado
  - Sistema incompatible
  - Puede ser cualquiera

- Dí si la siguiente afirmación es cierta o falsa y justifica tu respuesta: “Un sistema compatible indeterminado está generado por dos ecuaciones equivalentes”
- Dí si la siguiente afirmación es cierta o falsa y justifica tu respuesta: “Dos sistemas equivalentes tienen la misma representación gráfica”.

- Dí si la siguiente afirmación es cierta o falsa y justifica tu respuesta: “Si dos sistemas tienen la misma representación gráfica, entonces son equivalentes”

**CP-P2: Problemas de refuerzo de cambio de sistemas de representación algebraico-natural y viceversa**

Pon en forma de ecuación los siguientes problemas:

- Tengo ahorrados 350 euros en billetes de 10 y 20 euros y en total tengo 25 billetes. ¿Cuántos billetes de cada tipo tengo?
- En un campo de fútbol el ancho mide el doble que el largo, y en total mide 160m. ¿Cuánto mide el largo y el ancho del campo de fútbol?
- En un exámen tipo test de 100 preguntas he contestado a las 100 preguntas. Las preguntas acertadas suman 0.1 puntos y las falladas restan 0.04 puntos. Si he obtenido una nota de 7.4 en el exámen, ¿cuántas preguntas he acertado?
- Un litro de vino mezcla de cuesta 1.4 euros. Si el vino es mezcla de un vino de 0.8 euros y un vino de 2.2 euros y en total tengo 20 litros de vino de mezcla, ¿cuántos litros de cada vino he utilizado para hacer la mezcla?

Inventa situaciones para los siguientes sistemas de ecuaciones:

$$a)\begin{cases} 2x+4y=5 \\ 3x+y=8 \end{cases} \qquad b)\begin{cases} x+y=8 \\ x-y=0 \end{cases} \qquad c)\begin{cases} 3x+5y=19 \\ 2x+y=8 \end{cases}$$

**CP-P3: Problemas de ampliación-reflexión**

Problema 1:

¿Cuánto pesa la torre en relación al resto de piezas?

Problema 2:

La suma de las dos cifras de un número es 10. Si invertimos el orden de sus cifras, el número resultante es 72 unidades menor que el anterior. ¿De qué número se trata?

Problema 3:

Para alquilar un coche en la empresa de coches de alquiler RRCar tienes que pagar 10 € de entrada más 0.4 € por kilómetro realizado. La empresa ZZCar alquila vehículos a 50 € de entrada más 0.3 € por kilómetro realizado.

Indica una situación en la que te salga más barato alquilar a la empresa RRCar y una situación en la que te salga más barato alquilar a ZZCar.

Problema 4:

El perímetro de un triángulo isósceles mide 23 centímetros. Si aumentamos cada uno de los lados desiguales del triángulo en un centímetro y el lado desigual en 5 centímetros, obtenemos un triángulo equilátero. ¿Cuánto miden los lados del triángulo isósceles?

## F. Técnicas

**T0: Asociadas a ecuaciones lineales con 2 incógnitas**

- **T0.1: Técnicas para distinguir y reconocer ecuaciones lineales con 2 incógnitas**
  - T0.1.1: Buscamos las variables independientes en la ecuación (en este caso serán $x$ e $y$)
    - Si una variable está multiplicada por otra variable, la ecuación no es lineal
    - Si una variable está en el denominador de una fracción irreducible, la ecuación no es lineal
    - Si una variable está elevada a un número distinto de 1, la ecuación no es lineal.
  - T0.1.2: La ecuación será lineal ⇔ operando se puede llegar a una ecuación de la siguiente forma: $ax + by + c = 0$, donde $a, b, c$ son números reales.
  - T0.1.3: La ecuación es lineal ⇔ operando se puede llegar a la forma canónica de una ecuación lineal.

- **T0.2: Técnicas para generar una ecuación lineal equivalente a partir de una ecuación lineal dada.**
  - T0.2.1: Operaciones que dejan invariante una ecuación lineal (aunque pueda haber alguna más, éstas operaciones son las que se utilizarán en la práctica)
    - Multiplicar, sumar, restar o dividir cualquier número real distinto de 0 a ambos lados de una ecuación genera una ecuación equivalente.
    - Sumar o restar un valor real multiplicado por una variable a ambos lados de la ecuación genera una ecuación equivalente.
  - T0.2.2: Dos ecuaciones son equivalentes si dados $(x_0, y_0) \neq (x_1, y_1)$ son solución de una ecuación, también lo son de otra. (son soluciones de ambas).
  - T0.2.3: Dos ecuaciones son equivalentes si y sólo si tienen la misma forma canónica

- **T0.3: Técnicas para crear una tabla de valores a partir de una ecuación con dos incógnitas**
  - T0.5.1.a: Conocer un par de puntos $(x_0, y_0)$ solución de la ecuación de la ecuación dado $x_0$ cualquiera: sustituimos el valor de $x_0$ por $x$ en la ecuación lineal con dos incógnitas, generando así una ecuación lineal con una incógnita en la variable $y$ . Con el valor solución de dicha ecuación, $y = y_0$ , formamos el par $(x_0, y_0)$ solución de la ecuación lineal.
  - T0.5.1.b: Conocer un par de puntos $(x_0, y_0)$ solución de la ecuación de la ecuación dado $y_0$ cualquiera: sustituimos el valor de $y_0$ por $y$ en la ecuación lineal con dos incógnitas, generando así una ecuación lineal con una incógnita en la variable $x$ . Con el valor solución de dicha ecuación, $x = x_0$ , formamos el par $(x_0, y_0)$ solución de la ecuación lineal.
  - T0.5.1: Para rellenar una tabla dada una ecuación lineal con dos incógnitas, si tenemos dado un valor de $x = x_i$ rellenamos el valor faltante para $y = y_i$ en la tabla con la técnica T0.05.1.b. Si tenemos un valor dado de $y = y_i$ , rellenamos el valor faltante para $x = x_i$ en la tabla con la técnica T0.05.1.a. Para crear la tabla, basta tomar valores cualesquiera para $x$ y proceder con la técnica T0.05.1.a. para obtener los valores de $y$ ó tomar valores cualesquiera para $y$ procediendo con la técnica T0.05.1.b. para obtener posteriormente los valores de $x$ .
- **T0.4: Técnica para representar la ecuación de una recta**
  - Representación de una recta que pasa por dos puntos
  - Representación de una recta dada su forma canónica
  - Representación de una recta en forma punto-pendiente

**T1: Asociadas a sistemas de ecuaciones lineales con 2 incógnitas:**

- **T1.1: Técnicas para distinguir y reconocer un sistema de ecuaciones lineales con 2 incógnitas.**

- T1.1.1: Aplicamos T0.1 sobre ambas ecuaciones del sistema. Si ambas son lineales, entonces el sistema es un sistema de ecuaciones lineales. En caso contrario el sistema no será un sistema de ecuaciones lineales.

- **T1.2: Técnicas para crear sistemas equivalentes a uno dado mediante el uso de operaciones elementales.**
  - T1.2.1: Tendremos un sistema de ecuaciones lineales equivalente al inicial si aplicamos las técnicas T0.2.1 sobre cada una de las ecuaciones del sistema, combinadas con sustituir una de las dos ecuaciones del sistema por la suma o resta de ambas.
  - T1.2.2: Dos sistemas de ecuaciones lineales son equivalentes ⇔ las soluciones de ambos sistemas son las mismas.
- **T1.3: Técnicas para conocer y comprender el concepto de solución de un sistema.**
  - T1.5.1: Un par $(x_0, y_0)$ es solución del sistema si es solución simultánea de cada una de las ecuaciones del sistema. Un par $(x_0, y_0)$ será solución de una ecuación si al sustituir el valor de $x$ por $x_0$ y el valor de $y$ por $y_0$ se obtiene una igualdad que siempre es cierta, p. ej: 0=0 ó 7=7.
- **T1.4: Técnicas para distinguir entre los distintos tipos de ecuaciones lineales que existen (compatible determinado, compatible indeterminado, incompatible)**
  - T1.6.1: Escribimos el sistema como:

$$\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$$

    - Si $a/a' = b/b' = c/c'$ → Sistema compatible indeterminado
    - Si $a/a' = b/b' \neq c/c'$ → Sistema incompatible
    - Si $a/a' \neq b/b'$ → Sistema compatible determinado
  - T1.6.2: Llevamos las dos ecuaciones del sistema a su forma canónica:
    - Si son iguales → Sistema compatible determinado
    - Si son distintas pero tienen el mismo coeficiente en $x$ → Sistema incompatible
    - Si tienen distinto coeficiente en $x$ → Sistema compatible determinado

**T2. Técnicas de resolución de sistemas ecuaciones lineales**

- **T2.1: Resolver sistemas de ecuaciones lineales mediante tablas.**

  Esta técnica es recomendable sólo en problemas preparados, en dónde se den tablas de valores por completar para ambas ecuaciones, o en algunos problemas concretos, como el problema 1.3.2, en el que los posibles valores de $x$ ó $y$ son limitados.

  Se crea (o rellena ) una tabla de valores para ambas ecuaciones. Si se encuentra un par $(x_0, y_0)$ que esté en ambas representaciones, ese par es solución del sistema.

- **T2.2: Resolver gráficamente sistemas de ecuaciones lineales.**

  Se representan gráficamente las rectas de ambas ecuaciones de forma conjunta.

  - Si las rectas son paralelas no coincidentes: Sistema incompatible
  - Si las rectas son coincidentes: Sistema compatible indeterminado
  - Si las no son paralelas: Sistema compatible determinado → El punto de intersección de ambas rectas es la solución del sistema.

- **T2.3: Resolver sistemas de ecuaciones lineales mediante los distintos métodos algebráicos: igualación, reducción, sustitución**

  **T2.3-a: Sustitución:** Dado un sistema de ecuaciones de ecuaciones lineales, despejamos una de las variables (por ejemplo, $y$) de la primera ecuación y sustituimos su expresión en la segunda ecuación, obteniendo en la segunda ecuación una ecuación de primer grado en la variable $x$. Calculamos el valor de $x = x_0$ y lo sustituimos en la primera ecuación, quedando una ecuación de primer grado para la variable $y$. Calculamos el valor de $y = y_0$. El par $(x_0, y_0)$ es solución del sistema.

  **T2.3-b: Igualación:** Dado un sistema de ecuaciones lineales, despejamos la misma variable (por ejemplo, $y$) en las dos ecuaciones e igualamos el valor de $y$, obteniendo así una ecuación de primer grado en la variable $x$. Calculamos el valor de $x = x_0$ y lo sustituimos cualquiera de las dos ecuaciones, quedando una ecuación de primer grado para la variable $y$. Calculamos el valor de $y = y_0$. El par $(x_0, y_0)$ es solución del sistema.

  **T2.3-c: Reducción:** Operamos entre las ecuaciones haciendo uso de **T1.2** , de modo que se genere un sistema de ecuaciones en el que una de las ecuaciones sólo dependa de una variable (por ejemplo, $x$). Calculamos el valor de $x = x_0$ y lo sustituimos en la otra ecuación, quedando una ecuación de primer grado para la variable $y$. Calculamos el valor de $y = y_0$. El par $(x_0, y_0)$ es solución del sistema.

## G. Tecnologías

Las tecnologías que se van a citar a continuación van a ser las responsables de justificar las técnicas anteriormente citadas. Cada una de las técnicas antes citadas está sustentada por alguna/s de estas tecnologías:

**TG0: Asociadas a ecuaciones lineales con 2 incógnitas:**

- **TG0.1: Definición de ecuación lineal con 2 incógnitas.**
  Una ecuación lineal con dos incógnitas es una ecuación de la forma: $ax + by = c$, en donde los coeficientes $a$, $b$ y $c$ son números reales dados.
- **TG0.2: Forma canónica de una ecuación lineal.**
  Se considera la forma canónica de una ecuación lineal aquella que tras operar obtenemos $y = mx + n$
- **TG0.3: Concepto de ecuaciones lineales equivalentes.**
  Dos ecuaciones lineales son equivalentes ⇔ tienen las mismas soluciones.
  Dos ecuaciones lineales son equivalentes ⇔ tienen la misma forma canónica.
- **TG0.4: Definición de solución de una ecuación lineal.**
  Un par $(x_{0,}\, y_0)$ es solución de la ecuación, si al sustituir $x = x_{0,}\, y = y_0$ en la ecuación lineal se verifica una igualdad.

**TG1: Asociadas a sistemas de ecuaciones lineales con 2 incógnitas:**

- **TG1.1: Definición de sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas.**
  Un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas es un sistema de la forma

$$\begin{aligned} a_{11}x + a_{12}y = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y = b_2 \end{aligned}$$

  en donde coeficientes $a_{ij}$ y $b_i$ son números reales dados.

- **TG1.2: Definición de distintos tipos de sistemas de ecuaciones lineales (compatible determinado, compatible indeterminado, incompatible, )**

  Un sistema de ecuaciones lineales se dirá que es compatible si tiene solución. Dentro de los sistemas compatibles podemos distinguir entre:

  - compatible determinado: el sistema tiene una única solución
  - compatible indeterminado: el sistema tiene infinitas soluciones.

  Un sistema de ecuaciones lineales se dirá que es incompatible si no existe solución.

- **TG1.3: Tecnología para identificar los distintos tipos de sistemas de ecuaciones lineales**

  La regla de Cramer justifica las técnicas T1.4.
- **TG1.4: Concepto de sistema de ecuaciones equivalentes.**

  Dos sistemas de ecuaciones lineales son equivalentes ⇔ tienen las mismas soluciones.
- **TG1.5: Definición de solución de un sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas.**

  Un par $(x_{0,} y_0)$ es solución del sistema de ecuaciones, si al sustituir $x = x_{0,} y = y_0$ en el sistema se verifican igualdades en las dos ecuaciones del sistema.

**TG2. Tecnologías que justifican la resolución de sistemas ecuaciones lineales**

- **TG2.1: Justificación de la técnica tabular:**

  Un par $(x_0, y_0)$ es solución de un sistema de ecuaciones lineales si y sólo si al representar en forma tabular cada una de las ecuaciones $(x_0, y_0)$ está en la representación tabular de ambas ecuaciones.
- **TG2.2: Justificación del método gráfico**

  Un par $(x_0, y_0)$ es solución de un sistema de ecuaciones lineales si y sólo si $(x_0, y_0)$ está en la intersección de la representación gráfica de ambas ecuaciones lineales.
- **TG3.2: Justificación de los métodos algebraicos de resolución:**

  **TG3.2-a: Sustitución:** Al aplicar la técnica **T2.3-a** se obtiene una solución del sistema.

**TG3.2-b: Igualación:** Al aplicar la técnica **T2.3-b** se obtiene una solución del sistema.

**TG3.2-c: Reducción:** Al aplicar la técnica **T2.3-c** se obtiene una solución del sistema. La justificación de la aplicación de T2.3-c también se puede justificar con el método de Gauss.

## G1. Justificación de las técnicas

Teniendo en consideración que es una primera toma de contacto con los Sistemas de Ecuaciones Lineales y que la justificación de algunas técnicas puede tener más dificultad que la propia técnica en sí, no todas las técnicas que aparecen van a ser justificadas con rigor. Del mismo modo, en este trabajo se citan las tecnologías que sustentan las técnicas sin hacer demostraciones formales de algunas de las tecnologías, como ocurre con TG2.

Se pretende que las técnicas T0 y T1 aparezcan de forma natural y por descubrimiento al plantear razones de ser de problemas. Tras exponer su razón de ser, estas técnicas van a ser institucionalizadas por el profesor (sin entrar en detalle en T0.4 y T1.4), justificándose con el uso de las tecnologías, sin expectativas de que el alumnado comprenda en profundidad la justificación de las mismas.

Con respecto a las técnicas de resolución de sistemas ecuaciones lineales, se explicarán e institucionalizarán las técnicas T2.1 y T2.2 sin preocuparnos por su justificación. Para T2.3 sólo se expondrá en profundidad la técnica T2.3-a: sustitución, sin entrar en detalle en la justificación de la misma. Las técnicas T2.2-b y T2.2-c sí aparecerán como la razón de ser de algunos problemas o serán mencionadas, aunque sólo se pretende que el alumnado tenga una idea de las mismas o un primer acercamiento, sin pretensiones de que las aplique a la hora de resolver problemas, aunque sin excluirlo de aplicarlas si las ha entendido y quiere hacerlo.

En consecuencia con lo expuesto anteriormente, cuando al alumnado se le pida la resolución de alguna tarea, no se le impondrá la resolución por ningún método en concreto, y si se pretende que se resuelva el problema con las técnicas T2.1 o T2.2 será de forma guiada.

## H. Sobre la secuencia didáctica y su cronograma

Se presenta a continuación una secuencia didáctica a modo de tabla, que consta de 12 sesiones de 50 minutos cada una de ellas.

En la secuencia didáctica se van a tener en consideración muchos de los puntos vistos hasta el momento, de manera que la puesta en común de estos puntos en la secuenciación los va a dotar de sentido, y se buscará a su vez que esta secuenciación esté en concordancia con los apartados anteriores. Por tanto, en esta secuenciación se tendrán en cuenta los conocimientos previos del alumno, y se va a apoyar en los problemas y razones de ser que han sido expuestos hasta el momento, con una metodología centrada en el aprendizaje del alumno por autodescubrimiento, con un aprendizaje a través de la resolución de problemas.

En esta secuenciación también está cuidado el orden, de manera que aunque el fin sea que el alumnado pueda resolver sistemas de ecuaciones lineales, se buscará que el alumnado tenga un aprendizaje significativo. Es por ello, que las primeras sesiones (S1 y S2) estarán centradas en los campos de problemas asociados a ecuaciones lineales con 2 incógnitas **(CP0).** Tras estas sesiones, con S3 y S4 se pretende que el alumnado asiente la idea de concepto de sistema de ecuaciones y solución del mismo, asociado al campo de problemas **CP1** . A continuación, se preparará al alumno para afrontar la solución de problemas: las sesiones 5, 6 y 7 hacen especial hincapié en que el alumnado esté familiarizado y entienda las operaciones que dejan invariante un sistema de ecuaciones, así como que entienda la idea del método gráfico. Éstas sesiones tratan tanto **CP1** como **CP2.** Las sesiones 8, 9 y 10 se centrarán en la resolución de problemas (**CP2**), en concordancia con el orden de las sesiones anteriores. Por último habrá una sesión de repaso, dudas y/o ampliación (S11) y la última sesión (S12) será la prueba escrita.

Como se puede observar, la tabla expuesta (excluyendo S11 y S12) consta de varios colores, que forman distintos bloques en la misma. Cada uno de estos bloques empieza con una razón de ser, con la pretensión de que el alumnado descubra un nuevo concepto a través de la resolución de problemas. A continuación de la razón de ser, se proponen una serie de problemas de consolidación/institucionalización, en concordancia con la metodología expuesta.

| | Sesión | Actividades |
|---|---|---|
| **CP0** | **S1.** Evaluación inicial e introducción ecuaciones lineales | ● Ficha evaluación inicial<br>● RS1: Concepto de ecuación lineal, ecuaciones lineales equivalentes y representación gráfica. |
| | **S2.** Consolidación de ecuaciones lineales | ● Institucionalización de ecuación lineal<br>● Ejercicios de consolidación de equivalencia entre ecuaciones lineales y cambios de sistemas de representación. |
| **CP1** | **S3.** Introducción de los sistemas de ecuaciones lineales | ● RS2: Introducción de sistema de ecuaciones lineales y repaso de creación de tabla de valores.<br>● Definición e institucionalización de sistema de ecuaciones lineales. |
| | **S4.** Refuerzo de concepto de sistema de ecuaciones lineales | ● Ejercicios para entender y trabajar el concepto de sistema<br>● Cambios de representación de sistemas de ecuaciones lineales y técnicas tipo ensayo-error para resolverlas. |
| **CP1/ CP2** | **S5.** Sistemas de ecuaciones equivalentes | ● RS3: Sistemas de ecuaciones equivalentes. Operaciones que mantienen la solución de un sistema de ecuaciones. |
| | **S6**. Tipos de sistemas e introducción al método gráfico. | ● Repaso de sistemas de ecuaciones equivalentes e institucionalización de los distintos tipos de sistemas.<br>● Relación de los sistemas de ecuaciones con los gráficos e introducción al método gráfico. |
| | **S7.** Relación entre sistemas de ecuaciones lineales y problemas reales | ● Modelización de problemas en lenguaje habitual a sistemas de ecuaciones y viceversa. |

| | | |
|---|---|---|
| **CP2** | **S8.** Método gráfico | • RS4: Resolución de distintos sistemas aplicando el método gráfico. |
| | **S9.** Método de sustitución | • Solución de sistemas de ecuaciones lineales aplicando el método de sustitución |
| | **S10.** Resolución de sistemas de ecuaciones | • Solución de sistemas de ecuaciones lineales aplicando el método que se considere más oportuno (sustitución por defecto). |
| | **S11.**Repaso, dudas y/o ampliación | |
| | **S12.** Prueba escrita | |

# I. Evaluación

A continuación se pretende elaborar una prueba de evaluación del aprendizaje, que nos permitirá valorar la adquisición de competencias y conocimientos del alumnado en el tema de Sistemas de Ecuaciones Lineales. En esta prueba se señalarán los aspectos del conocimiento que pretendemos evaluar del alumnado en cada pregunta. Entre ellos se destacan los campos de problemas y las técnicas, así como las tareas principales y auxiliares y los estándares de aprendizaje de la LOMCE.

Tras valorar los aspectos del conocimiento que evaluamos, se presenta una corrección de la prueba, se prevén los posibles errores que se puedan cometer y se elaboran criterios de corrección que se van a emplear para calificar esta prueba, con la intención de que la guía de corrección pueda ser utilizada por otros correctores. Para la corrección se considerará el modelo de los tercios propuesto por Gairín, Muñoz y Oller (2012). Finalmente se estudia el modo que se considera más adecuado para la comunicación de los resultados de la prueba realizada.

## I1. Diseño de una prueba escrita

**PRUEBA ESCRITA**

- **Ejercicio 1:** Indica cuál de los siguientes sistemas son sistemas de ecuaciones lineales: **(0.5 puntos)**

$$\text{a)} = \begin{cases} 3x + 5xy = 5 \\ 5x + 5y = 16 \end{cases} \quad \text{b)} = \begin{cases} x^2 + 8y = 7 \\ x + 5y = 11 \end{cases} \quad \text{c)} = \begin{cases} x + 5y = 5 \\ 2x + 7y = 16 \end{cases}$$

- **Ejercicio 2 :** Completa la siguiente tabla dada la siguiente ecuación: $7x - 5y = 2$ **(0.5 puntos )**

| **x** | 1 | -1 | 3 | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| **y** | | | | 2 | 0 | 4 |

- **Ejercicio 3:** En el mercado Eva y Luis fueron a comprar fruta. Ambos compraron naranjas y aguacates y esto fué lo que pagaron:
  - Eva pagó 16 euros por 4 aguacates y 4 kg de naranjas.
  - Luis pagó 15 euros por 3 kg de naranjas y 6 aguacates.

**a)** Después de hacer la compra, Eva dijo que cada kilo de naranjas costaba 2 euros y cada aguacate también costaba 2 euros. Luis dijo que el kilo de naranjas costaba 3 euros y cada aguacate costaba 1 euro. ¿Quién lleva razón? **(1 punto)**

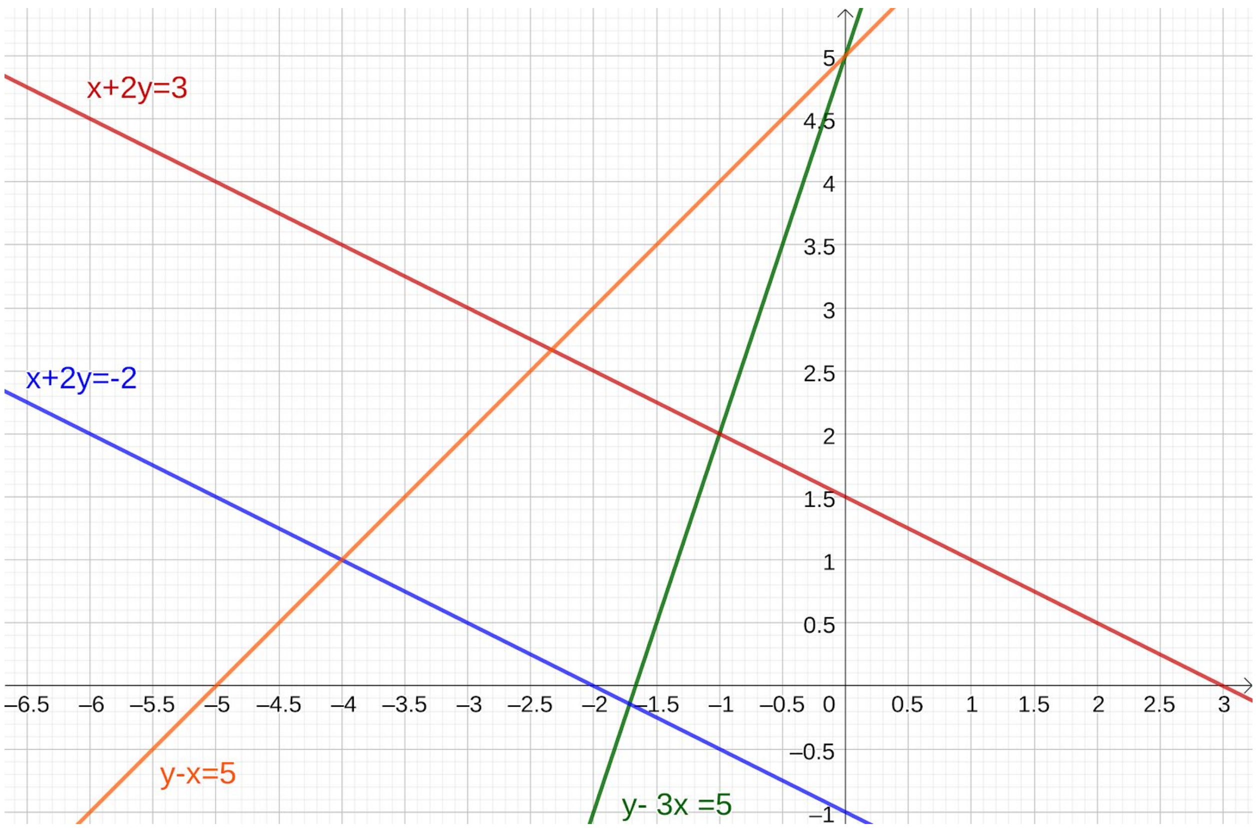
**b)** Sabiendo quien lleva razón, ¿cuánto costarían 2 kg de naranjas y 3 aguacates? **(0.5 puntos)**

**c)** Al día siguiente, Eva fue a la frutería y pagó 10 euros por 1 kg de naranjas y 6 aguacates, ¿El precio era correcto? (**0.5 puntos**)

❖ **Ejercicio 4:** Enuncia un problema real cuya situación interpretación matemática sea: **(1 punto)**

$$\begin{cases} x + 2y = 5 \\ 2x + 7y = 16 \end{cases}$$

❖ **Ejercicio 5:** Observa el siguiente gráfico en el que están representadas una serie de rectas con sus correspondientes ecuaciones, y responde:




**a)** ¿Es el punto $x$=0, $y$=5 solución de algún sistema de ecuaciones? En caso de que tu respuesta sea sí, ¿qué ecuaciones forman ese sistema? **(0.5 puntos)**

**b)** ¿Es el punto $x$=0, $y$=-5 solución de algún sistema de ecuaciones? En caso de que tu respuesta sea sí, ¿qué ecuaciones forman ese sistema? **(0.5 puntos)**

**c)** Escribe un sistema de ecuaciones que esté representado en el gráfico y que no tenga solución (**0.5 puntos**)

**d)** ¿Cuál es la solución del sistema formado por las siguientes ecuaciones? **(0.5 puntos)**

$$\begin{cases} x + 2y = -2 \\ x - y = 5 \end{cases}$$

❖ **Ejercicio 6:** Resuelve cada uno de los sistemas de ecuaciones planteados a continuación utilizando el procedimiento que consideres más oportuno. **(3 puntos)**

$$a) = \begin{cases} 3x - 5y = -4 \\ 5x + 10y = -3 \end{cases} \quad , \quad b) = \begin{cases} 3y - 6 = x \\ x + 4y = 20 \end{cases} \quad , \quad c) = \begin{cases} -9x - 5y = 11 \\ x + 3y = 11 \end{cases}$$

## I2. Aspectos del conocimiento que pretendemos evaluar

**Ejercicio 1**

| Campos de problemas | Técnicas |
|---|---|
| CP1.1 | T1.1 |

Tarea principal

- Diferenciación clara entre sistemas de ecuaciones lineales y otros sistemas de ecuaciones.

**Ejercicio 2**

| Campos de problemas | Técnicas |
|---|---|
| CP0.3 | T0.3 |

Tarea principal

- Sustituir los valores de las variables dada una ecuación lineal.
    - **Tarea auxiliar general:** Realizar cálculos algebraicos y aritméticos de forma correcta.

**Ejercicio 3**

| Campos de problemas | Técnicas |
|---|---|
| CP1.3 | T1.3 |

<u>Tarea principal</u>

- Comprender y traducir un problema dado en lenguaje habitual
- Comprobar si una solución ofrecida es correcta
    - **Tarea auxiliar general:** Realizar cálculos algebraicos y aritméticos de forma correcta.

**Ejercicio 4**

| Campos de problemas | Técnicas |
|---|---|
| CP1.3 | - |

Para este problema, no hay ninguna técnica concreta que se trabaje, aunque, podemos considerar que se trabaja el problem posing, que es una situación didáctica interesante.

<u>Tarea principal</u>

- Creación de un problema en lenguaje habitual dado un sistema de ecuaciones.

**Ejercicio 5**

| Campos de problemas | Técnicas |
|---|---|
| CP1.3 | T0.4, T1.3, T2.2 |

<u>Tarea principal</u>

- Interpretar de forma correcta el método de resolución gráfico para sistemas de ecuaciones.
    - **Tarea auxiliar específica:** Relaciona correctamente los elementos del eje cartesiano con sus valores.

**Ejercicio 6**

| Campos de problemas | Técnicas |
|---|---|
| CP2 | T2.2 |

Tarea principal

- Utilizar de forma correcta las técnicas de resolución algebraicas (igualación, sustitución y reducción)
- Mostrar el valor resultante de cada una de las incógnitas.
    - **Tarea auxiliar específica:** Obtener ecuaciones simplificadas equivalentes a las ecuaciones iniciales.
    - **Tarea auxiliar general:** Realizar cálculos algebraicos y aritméticos de forma correcta.

**Estándares de aprendizaje de la LOMCE**

Siguiendo lo establecido en la ORDEN ECD/489/2016, de 26 de mayo, por la que se aprueba el currículo de la Educación Secundaria Obligatoria y se autoriza su aplicación en los centros docentes de la Comunidad Autónoma de Aragón, detallaremos a continuación los estándares de aprendizaje evaluables (LOMCE) que aparecen en cada uno de los ejercicios de la prueba escrita. Se citarán los estándares de aprendizaje que nos van a aparecer para representar posteriormente en forma de tabla los estándares que aparecen:

- **Est.MA.1.2.1**. Analiza y comprende el enunciado de los problemas (datos, relaciones entre los datos, contexto del problema).
- **Est.MA.1.6.2.** Establece conexiones entre un problema del mundo real y el mundo matemático: identificando el problema o problemas matemáticos que subyacen en él y los conocimientos matemáticos necesarios.
- **Est.MA.1.6.4.** Interpreta la solución matemática del problema en el contexto de la realidad.

- **Est.MA.2.6.1**. Describe situaciones o enunciados que dependen de cantidades variables o desconocidas y secuencias lógicas o regularidades, mediante expresiones algebraicas, y opera con ellas.
- **Est.MA.2.6.3**. Utiliza las identidades algebraicas notables y las propiedades de las operaciones para transformar expresiones algebraicas.
- **Est.MA.2.7.1**. Comprueba, dada una ecuación (o un sistema), si un número (o números) es (son) solución de la misma.
- **Est.MA.2.7.2**. Formula algebraicamente una situación de la vida real mediante ecuaciones de primer y segundo grado, y sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas, las resuelve e interpreta el resultado obtenido.

Presentamos a continuación los diferentes estándares de aprendizaje en cada ejercicio según la tabla que sigue

| | **Est.MA .1.2.1** | **Est.MA .1.6.2** | **Est.MA .1.6.4** | **Est.MA .2.6.1** | **Est.MA .2.6.3** | **Est.MA .2.7.1** | **Est.MA .2.7.2** |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Ejercicio 1 | ✔ | ✗ | ✗ | ✗ | ✗ | ✔ | ✗ |
| Ejercicio 2 | ✔ | ✗ | ✗ | ✗ | ✗ | ✔ | ✗ |
| Ejercicio 3 | ✔ | ✗ | ✔ | ✗ | ✗ | ✔ | ✔ |
| Ejercicio 4 | ✔ | ✔ | ✗ | ✔ | ✗ | ✗ | ✔ |
| Ejercicio 5 | ✔ | ✗ | ✗ | ✗ | ✗ | ✔ | ✗ |
| Ejercicio 6 | ✔ | ✗ | ✗ | ✗ | ✔ | ✔ | ✗ |

## I3. Corrección, respuestas erróneas previsibles y calificación

Para la corrección de los ejercicios que vienen a continuación (a excepción del ejercicio 1 y 5), se presentará una rúbrica detallada indicando la penalización máxima que se puede aplicar en caso de error según la tarea que se considera, siguiendo el modelo de Gairín, Muñoz y Oller

(2012).

**Ejercicio 1**

Corrección

Son sistemas de ecuaciones lineales el apartado a) y c).

Respuestas erróneas previsibles

- Cualquiera distinta a la opción: Son sistemas de ecuaciones lineales el apartado a) y c).

Calificación

Por el valor de la puntuación del ejercicio y el modo en el que está creado, en este ejercicio sólo se valorará puntuación máxima si se responde correctamente el ejercicio (0.5 puntos) y 0 puntos si no se responde de forma correcta

**Ejercicio 2**

Corrección

| **x** | 1 | -1 | 3 | 12/7 | 2/7 | 22/7 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| **y** | 1 | -9/5 | 19/5 | 2 | 0 | 4 |

Respuestas erróneas previsibles

- No sabe rellenar la tabla
- Sustituye los valores de la variable $y$ por los de la variable $x$ y viceversa
- Sustituye bien los valores pero opera mal

Calificación

| Tipo de error | Penalización | Finaliza corrección |
|---|---|---|
| **Tarea principal**: Sustitución de valores de la ecuación en la tabla (p.ej: no sabe rellenar la tabla o sustituye los valores de la variable $y$ por los de la variable $x$ y viceversa) | Total | Si |
| **Tarea auxiliar general:** Realizar cálculos algebraicos y aritméticos de forma correcta | 1/3 | No |

**Ejercicio 3**

Corrección

Este problema se puede enfocar de dos modos distintos. Una opción es utilizar el lenguaje verbal y la lógica para sustituir los valores (Si un aguacate vale 4 euros, 4 aguacates valen 4*4=16) y hacer todas las comprobaciones que se piden. La otra opción es considerar: $x$ =”Número de aguacates” ; $y$=”kilos de naranjas” y transformar el enunciado y las preguntas. Consideraremos para la corrección ésta segunda opción, aunque ambas serían válidas.

**Solución**: Sea $x$=”Número de aguacates” ; $y$=”kilos de naranjas”. El enunciado genera el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} 4x + 4y = 16 \\ 3x + 6y = 15 \end{cases}$$

**a)** Sustituyendo $x$=2 e $y$=2 como propone Eva, sólo se cumple la igualdad en el primer sistema de ecuaciones. Sustituyendo $x$=3 e $y$=1 como propone Luis, se comprueba que se cumplen ambas igualdades del sistema de ecuaciones. Por lo tanto, **Luis lleva razón.**

**b)** En este caso, sustituyendo $x$=3 e $y$=1 en $2x+3y$ obtenemos 2(3)+3(1)=9. **Costarán 9**

**euros**

**c)** $10 = x + 6y$ ; Sustituyendo $x$=3 e y=1 10=1(4)+6(1) ✔. **El precio era correcto**.

Respuestas erróneas previsibles

- **En apartado a**
  - Decir que Eva lleva la razón
  - Decir que ambos están en lo correcto porque aciertan con sus propios precios
  - Decir que nadie lleva la razón
- **En apartado b**
  - Sustituir mal los valores
  - Operar mal
- **En apartado c**
  - Sustituir mal los valores
  - Operar mal

Calificación

| Tipo de error (apartado a) | Penalización | Finaliza corrección |
|---|---|---|
| **Tarea principal**: Comprender y traducir un problema dado en lenguaje habitual (p.ej: decir que Eva lleva razón porque se comprueba en una sola ecuación, o que ambos están en lo correcto porque aciertan con sus precios) | Total | Si |
| **Tarea principal**: Comprobar si una solución ofrecida es correcta (p. ej: decir que nadie lleva razón porque se sustituyen de forma incorrecta las variables) | Total | Si |
| **Tarea auxiliar general:** Realizar cálculos algebraicos y aritméticos de forma correcta. aquí | 1/3 | |

| Tipo de error (apartados b y c) | Penalización | Finaliza corrección |
|---|---|---|
| **Tarea principal**: Comprobar si una solución ofrecida es correcta (p. ej: porque se sustituyen de forma incorrecta las variables) | Total | Si |
| **Tarea auxiliar general:** Realizar cálculos algebraicos y aritméticos de forma correcta. aquí | 1/3 | |

**Ejercicio 4**

Corrección

Es un ejercicio de respuesta abierta. Se podría dar una solución verbal o responder con dibujos que representen una balanza (o cualquier otra idea gráfica que tenga sentido). Elegimos, por ejemplo una solución verbal:

**Solución:** Al utilizar la báscula de mi casa he pesado un paquete de arroz y dos paquetes de garbanzos y la báscula marcaba 5 kilos. Después he pesado dos paquetes de arroz y 7 paquetes de garbanzos y la báscula marcaba 16 kilos. (¿Cuánto pesa el paquete de arroz y el paquete de garbanzos?)

Respuestas erróneas previsibles

- Al tratar de darle sentido al problema, consideran variables distintas en cada una de las dos ecuaciones. Por ejemplo: 1 chicle de fresa más 2 chicles de menta cuestan 5 euros y 2 caramelos de naranja más 7 caramelos de limón cuestan 16 euros.

Calificación

| Tipo de error (apartado a) | Penalización | Finaliza corrección |
|---|---|---|
| **Tarea principal**: Desarrollo verbal. Modelización de un problema en lenguaje habitual dado un sistema de ecuaciones (p.ej: error de respuestas erróneas previsibles) | 2/3 | No |
| **Tarea auxiliar general:** Realizar cálculos algebraicos y aritméticos de forma correcta. aquí (p. ej: plantea bien el problema equivocándose al copiar algún número) | 1/5 | |

**Ejercicio 5**

Corrección

**a)** Sí es solución. Es solución de las ecuaciones $y = x - 5$ ; $y - 3x = 5$

**b)** No es solución.

**c)** $x + 2y = 3$ ; $x + 2y =- 2$

**d)** $x$=-4; $y$=1

Respuestas erróneas previsibles

- Equivocaciones al señalar (o encontrar) las ecuaciones.
- Equivocaciones al interpretar las coordenadas cartesianas.

Calificación

Cada apartado se calificará con puntuación máxima (0.5) puntos si se responde correctamente y con 0 puntos si no se responde correctamente (ya que en tal caso se estaría cometiendo un error en la tarea principal).

**Ejercicio 6**

<u>Corrección</u>

Cualquier ejercicio se podría solucionar utilizando cualquier método, aunque lo que parece más cómodo es utilizar reducción en el apartado a), igualación en el apartado b) y sustitución en el apartado c).

**Apartado a)** Procedemos a resolverlo por reducción:

$$\begin{cases} 3x - 5y = -4 \\ 5x + 10y = -3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 6x - 10y = -8 \\ 5x + 10y = -3 \end{cases} \Rightarrow 11x = -11 \Rightarrow x = -1$$

Con el valor de $x$ obtenido, llevado a la primera ecuación obtenemos:

$$3(-1) - 5y = -4 \Rightarrow -5y = -1 \Rightarrow y = 1/5$$

Por lo que la solución buscada es:

$$\boxed{x = -1 \;\; ; \;\; y = -1/5}$$

**Apartado b)** Por igualación:

$$\begin{cases} 3y + 6 = x \\ x + 4y = 20 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3y + 6 = x \\ x = 20 - 4y \end{cases} \Rightarrow 3y + 6 = 20 - 4y \Rightarrow 7y = 14 \Rightarrow y = 2$$

Llevamos el valor de $y$ a la primera ecuación:

$$3\,(2) + 6 = x \quad \Rightarrow \quad x = 12$$

Así, la solución del sistema es:

$$\boxed{x = 12 \quad ; \quad y = 2}$$

**Apartado c)** Por sustitución:

$$\begin{cases} -9x - 5y = 11 \\ x + 3y = 11 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -9x - 5y = 11 \\ x = 11 - 3y \end{cases}$$

Sustituyendo el valor de $x$ en la primera ecuación obtenemos:

$$-9(11 - 3y) - 5y = -11 \quad \Rightarrow \quad -99 + 27y - 5y = -11 \quad \Rightarrow \quad 22y = 88 \quad \Rightarrow \quad y = 4$$

Con este valor de $y$, llevado a la primera ecuación me queda:

$$x = 11 - 3(4) \quad \Rightarrow \quad x = -1$$

Por lo tanto, la solución del sistema es:

$$\boxed{x = -1 \quad ; \quad y = 4}$$

<u>Respuestas erróneas previsibles</u>

- Se despeja el valor de una de las 2 variables sin dar la solución al sistema
- Errores al simplificar ecuaciones o trabajar con ecuaciones equivalentes
- Fallos algebraicos y aritméticos en el proceso de resolución

Calificación

| Tipo de error | Penalización | Finaliza corrección |
| --- | --- | --- |
| **Tarea principal**: Utilizar de forma correcta las técnicas de resolución algebraicas | 2/3 | No |
| **Tarea auxiliar específica:** Obtener ecuaciones simplificadas equivalentes a las ecuaciones iniciales. | 1/4 | |
| **Tarea auxiliar general:** Realizar cálculos algebraicos y aritméticos de forma correcta. aquí (p. ej: plantea bien el problema equivocándose al copiar algún número) | 1/5 | |

## I4. Comunicación de las calificaciones

Tal y como afirma Mauri y Barberá (2007), la importancia de la comunicación de los resultados de aprendizaje al alumnado es relevante en la construcción del conocimiento en el aula. Es necesario que el alumno, al igual que el profesor, entienda la importancia de la finalidad pedagógica de la evaluación, por lo que la devolución y comunicación de las calificaciones al alumnado es un aspecto considerable a tener en cuenta.

No sólo va a ser importante cómo se comunican los resultados, sino cómo se señalen los errores. Por lo tanto, la corrección de ésta actividad se realizará por el profesorado fuera del horario de las clases, y se señalarán los errores, acompañados de la respuesta correcta en la prueba, para que el alumnado pueda identificarlos y entender qué es lo que se debía responder.

Se dedicará toda una sesión de clase a la corrección de las calificaciones. En esta sesión se entregará la prueba escrita corregida al alumnado, incidiendo en la importancia de la formación pedagógica que tiene la sesión de corrección, más allá de la nota numérica que se ha obtenido.

En la sesión de corrección, tras entregar las correcciones al alumnado, el profesor explicará cómo debía ser la respuesta correcta de cada uno de los ejercicios, poniendo algún ejemplo de respuestas del alumnado, e incidiendo en aquellos aspectos en los que se hayan observado más dificultades. Se ofrecerá la opción al alumnado de una reunión particular si el alumnado así lo desea. El profesor buscará el modo de comunicarse de forma particular con el alumnado si lo considera necesario.

## Referencias

Alonso, F., Barbero, C., Fuentes, I., Azcárate, A., Dozagarat, J., Gutiérrez, S., Ortiz, M., Rivière, V.y De Veiga, C. (1993). *Ideas y actividades para enseñar Álgebra*. Madrid: Síntesis

Arias, J.M y Maza, I. (2012). *Matemáticas ESO 2*. Madrid, España: Bruño

Bingolbali, F., y Bingolbali, E. (2019). One curriculum and two textbooks: opportunity to learn in terms of mathematical problem solving. *Mathematics Education Research Journal*, 31, 237–257.

Colera, J., Gaztelu, I. y Colera, R. (2016). *Matemáticas 2o ESO*. Madrid, España: Anaya

De Faria, E. (2016). Transposición didáctica: Definición, epistemología, objeto de estudio. *Cuadernos de investigación y formación en educación matemática,* 2, 1-6. Recuperado de https://revistas.ucr.ac.cr/index.php/cifem/article/view/6884/6570

Deivi, L. y Peña, A. (2006). Historia del álgebra lineal hasta los albores del siglo XX. *Divulgaciones Matemáticas,* 14,153-170. Recuperado de https://www.emis.de//journals/DM/v14-2/art6.pdf

Gairín J. M., Muñoz J. M., y Oller A. M. (2012). Propuesta de un modelo para la calificación de exámenes de matemáticas. *Investigación en Educación Matemática XVI*. Jaén: SEIEM, p. 261-274.

Galeano, O. y Váquiro, L. (2015). *Una propuesta didáctica para la resolución de ecuaciones de primer grado como relación de equivalencia utilizando el modelo virtual de balanza.* (trabajo de grado). Universidad del Valle, Santiago de Cali, Colombia.

Gaulin, C. (2001). Tendencias actuales de la resolución de problemas. *Sigma*, 19, 51-63.

Ibáñez, C., y Martínez-Juste, S. (2020). Proporcionalidad aritmética en libros de texto de 4º de ESO. *Suma*, 94.

Marcos, J.C. (11 de diciembre de 2018). La flor de Thymaridas de Paros. [Entrada en un blog]

Recuperado de https://bitacorademathematicasdejucarmarsa.blogspot.com/2018/12/la-flor-de-thymaridas-de-paros.html

Martínez, S., Muñoz, J.M., y Oller, A. M. (2014). Tratamiento de la proporcionalidad compuesta en cuatro libros de texto españoles. En M. T. González, M. Codes, D. Arnau y T. Ortega (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVIII* (p. 435-444). Salamanca: SEIEM.

Mauri, T. y Barberà, E. (2007). *Regulación de la construcción del conocimiento en el aula mediante la comunicación de los resultados de aprendizaje a los alumnos, Infancia y Aprendizaje*, 30:4, 483-497

Medina, I. y Albarracín, A. (2012). *Un estudio de la principal obra de Diofanto de Alejandría: La aritmética.* (trabajo de grado). Universidad pedagógica nacional de Bogotá, Colombia.

Monterrubio, M.C. y Ortega, T. (2009). Creación de un modelo de valoración de textos matemáticos. Aplicaciones. En M.J. González, M.T. González y J. Murillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIII* (p. 37-53). Santander: SEIEM.

Nieto, M., Pérez, A., Alcaide, F. (2016). *Matemáticas 2º ESO. Savia.* Madrid, España: SM.

ORDEN ECD/489/2016, de 26 de mayo, por la que se aprueba el currículo de la Educación Secundaria Obligatoria y se autoriza su aplicación en los centros docentes de la Comunidad Autónoma de Aragón.

Pulpón, A. (2010). *Historia de papiro de Rhind y similares.* Recuperado de http://matematicas.uclm.es/ita-cr/web_matematicas/trabajos/165/el_papiro_de_Rhind.pdf

Stanley, I. Grossman S. y Flores, J. (2012). *Álgebra lineal.* (7ª ed.). México: McGraw Hill latinoamericana.